

# La ferrorésonance, expérimentation et modélisation non linéaire

J.C. Gianduzzo, Stéphane Ygorra, Luc Lasne

Université de Bordeaux 1, Centre de Ressources en EEA

351, Cours de la Libération 33400 Talence, France.

Contact email : [lasne@creea.u-bordeaux.fr](mailto:lasne@creea.u-bordeaux.fr)

Site Internet : <http://ferroresonance.free.fr>

**Résumé :** Cet article traite d'une approche de la ferrorésonance, phénomène non linéaire spectaculaire responsable de surtensions et pics de courants remarquables, notamment sur les lignes de distribution électriques. Le but de l'étude, mis à part son côté expérimental, est de construire, pour des étudiants de niveau Master, une application pédagogique autour d'un phénomène non linéaire. La construction d'un modèle de ferrorésonance, exploité avec le logiciel gratuit "Scilab", doit permettre l'accès aux outils d'études non linéaires. Pour finir, l'étude des aspects théoriques doit élargir le raisonnement à des types de théories peu répandues, telles le concept de bifurcation ou le "chaos".

## 1. Généralités sur la ferrorésonance

Le terme de ferrorésonance existe dans la littérature scientifique depuis les années 1920 et désigne des régimes oscillatoires très particuliers dus à la coïncidence dans un circuit d'une inductance saturable, d'un condensateur et d'un faible amortissement.

Les particularités de la ferrorésonance sont les suivantes [1],[4],[5]:

- Résonance pour une large gamme de valeurs des paramètres du circuit concerné.
- Présence de pics de courants et de surtensions très importantes pouvant détériorer le circuit.
- Existence d'au moins deux régimes permanents stables différents.
- Existence d'un phénomène de saut entre les différents régimes, voire de comportement chaotique.

Pour illustrer le côté spectaculaire de la ferrorésonance, une manipulation très simple peut être mise en œuvre, sur un circuit  $R-L-C$  série alimenté par une tension sinusoïdale variable, comme le représente la figure 1.

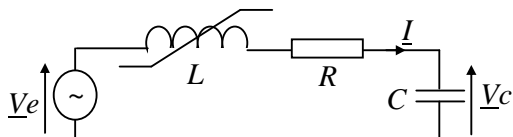


Fig 1 : circuit résonant non linéaire C

On parle dans ce cas de ferrorésonance série. L'inductance non linéaire  $L$  peut être, et c'est le cas le plus répandu, le primaire d'un transformateur à vide.

On relève sur les figures 2-a et 2-b, les oscillogrammes représentant le courant  $i(t)$ , la tension  $V_c(t)$  et la tension  $V_e(t)$  pour différentes valeurs de  $V_e$  efficace. (le circuit étant composé pour l'expérience, de  $C=17.5\mu F$ ,  $R=10\Omega$ ,  $L_{max}=3.5H$ )

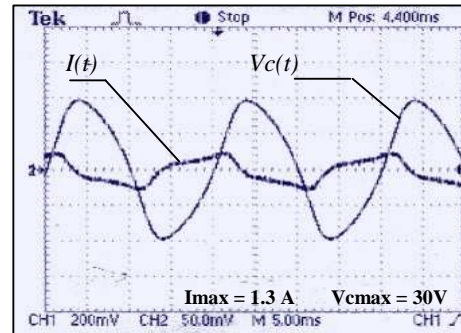


Fig 2-a :  $V_e = 80V$

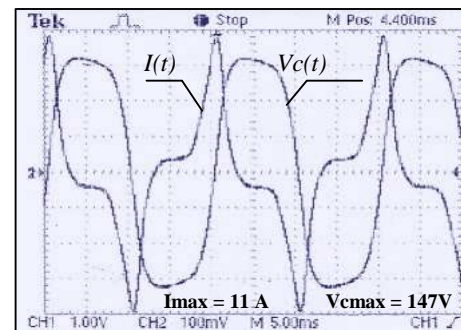


Fig 2-b :  $V_e = 90V$

Il se produit, pour une tension d'alimentation comprise entre 80V et 90V un "saut" qui propulse le circuit dans un deuxième type de régime permanent. Pour illustrer ce phénomène, on représente sur la figure 3 le relevé de la tension  $V_c$  crête en fonction de  $V_e$  efficace.

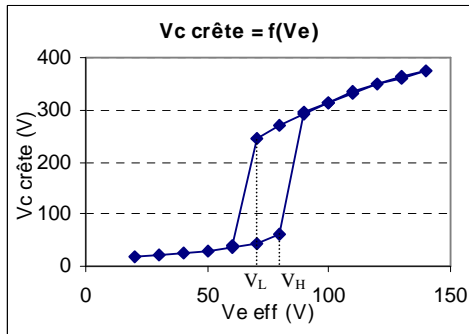


Fig 3 :  $V_{c_{eff}} = f(V_{e_{eff}})$

La bifurcation entre les deux régimes est de plus, le siège d'un effet d'hystérésis global du phénomène. En d'autres termes, la ferrorésonance se déclenche au-delà d'un seuil très précis de tension et disparaît en deçà d'un seuil plus petit.

## 2. Approche de la modélisation

Pour élaborer un modèle fiable du circuit siège de la ferrorésonance, il a paru suffisant de mesurer et de simuler au plus proche le comportement de l'inductance en fonction du courant dans le circuit :  $L(i)$ .

C'est cette hypothèse que les premières simulations sont censées confirmer.

La difficulté majeure réside dans le fait que l'inductance possède des trajets aller et retour différents, et qui dépendent de la valeur du courant maximal.

On représente sur la figure 4 la courbe  $L(i)$  déduite de mesures sur le circuit C pour un courant maximal de 4A.

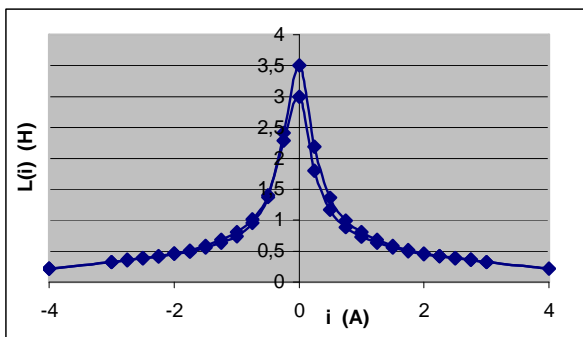


Fig 4 :  $L(i)$

Afin d'isoler les paramètres responsables du saut brutal de modes, il a paru intéressant de modéliser progressivement les diverses étapes qui amènent à un tel comportement.

Le paramétrage de l'inductance  $L$  en fonction de  $i(t)$  permet de simuler le circuit grâce à un algorithme de résolution des équations différentielles du circuit C rappelées ci dessous.

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} (V_e(t) - R \cdot i(t) - V_c(t) - i(t) \cdot \frac{dL}{dt}) \quad i(t) = C \frac{dV_c}{dt}$$

La particularité du programme, réalisé en visual basic, sera de tenir compte, pour chaque valeur du courant, de la valeur correspondante de l'inductance, ainsi que de pouvoir modifier les autres paramètres à volonté.

### 2-1) Première approche simplifiée

Un premier modèle, simplifié, repose sur l'évolution du flux  $\phi(i)$  au sein du circuit magnétique de l'inductance représenté sur la figure 4-a, ce qui constitue un modèle qui sert souvent en électrotechnique. L'évolution de l'inductance  $L$  (supposée symétrique) qui en résulte est celle représentée sur la figure 4-b.

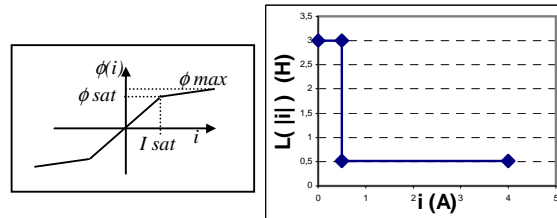


Fig 4-a

Fig 4-b

Les formes d'ondes issues de la simulation sont relevées, ici lors du passage en ferrorésonance, sur la figure 5-a. On notera qu'avec ce modèle, le passage d'un courant crête de 0.5 A à quelques dizaines d'Ampères est assez bref (Il se déroule en une dizaine de périodes, c'est à dire en 0.2s) et traduit un saut de mode brutal.

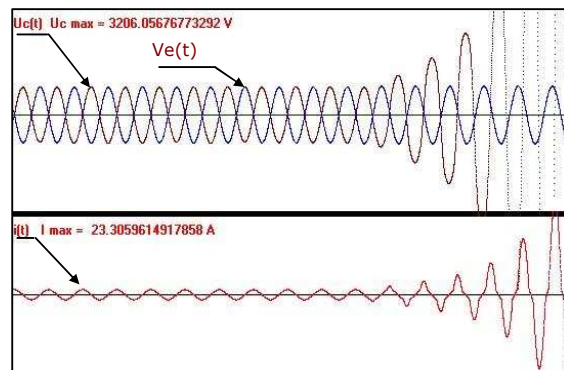


Fig 5-a: passage en ferrorésonance simulé  $V_e=265V$

Pour valider ce modèle, outre sa capacité à passer brutalement d'un mode "normal" à un mode de type "ferro-résonance", on dispose du tracé  $V_c=f(V_e)$  de la *figure 5-b*.

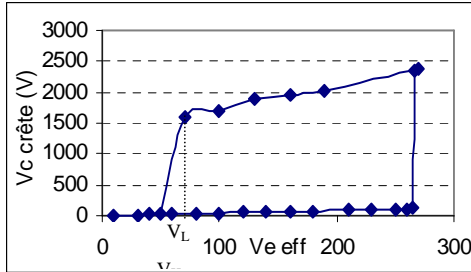


Fig 5-b: comportement global du modèle simplifié

Il est évident, au vu de ce graphe, que si le comportement global du phénomène est à peu près conforme à la réalité, les valeurs des paramètres qui le décrivent (tension de seuil de déclenchement et formes d'ondes obtenues en ferro-résonance profonde) sont complètement fausses en comparaison avec la *figure 3*.

## 2-2) Modélisation fine

En réalité, l'évolution du flux dans le circuit magnétique de l'inductance est conforme au schéma de principe représenté sur la *figure 6-a*. L'évolution de la valeur de l'inductance correspondante, et que l'on retiendra pour la modélisation, est représentée sur la *figure 6-b*.

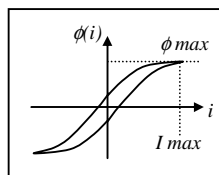


Fig 6-a

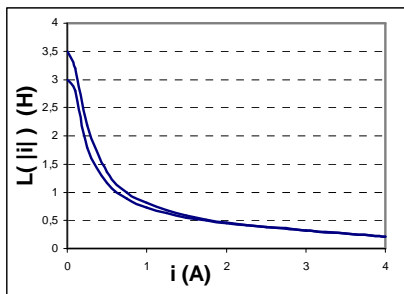


Fig 6-b

Pour mieux profiter du modèle, il est possible de paramétrer la fonction  $L(i)$  en valeur

maximale et en hystérésis. L'intérêt du programme de simulation est alors de pouvoir modifier à loisir des paramètres difficilement modifiables dans la réalité.

Les formes d'ondes issues de la simulation sont relevées sur la *figure 7-a* et *7-b*, avant et après le passage en ferro-résonance (avec  $R=50\Omega$ ).

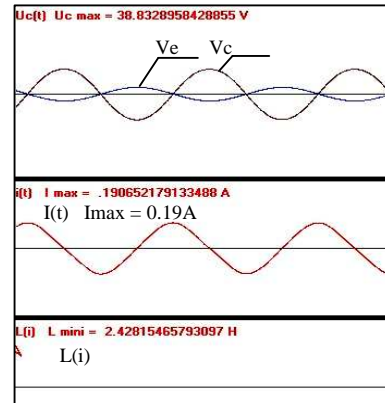


Fig 7-a :  $V_e=75V$

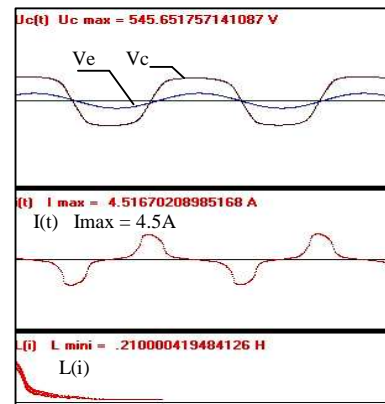


Fig 7-b :  $V_e=90V$

La simulation se révèle satisfaisante en ce qui concerne les éléments suivants :

- Valeurs des tensions de passages dans les deux régimes permanents
- Ordre de grandeur des tensions et courants avant et pendant la ferro-résonance.
- Déphasage courant / tension  $V_e(t)$

Pour illustrer, de façon visuelle le comportement global du modèle, la courbe  $V_c=f(V_e)$  est représentée sur le graphe de la *figure 8*. La concordance avec le graphe de la *figure 3* illustre la qualité du modèle.

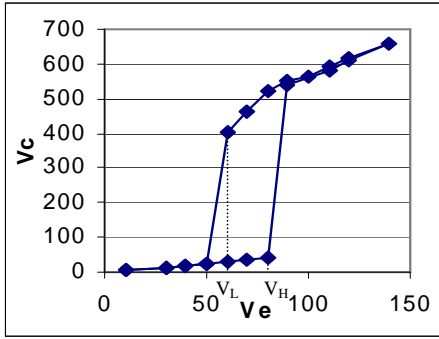


Fig 8: comportement global du modèle fin

La seule grandeur globalement imprécise reste l'amplitude de la tension  $V_c$  pendant le régime permanent de ferorésonance. Il est certainement possible de corriger cette imperfection en affinant le modèle de l'inductance, par exemple en tenant compte des pertes fers équivalentes du circuit magnétique.

## 2-2) Conclusions sur la modélisation

Les diverses étapes de la modélisation font apparaître très nettement que le comportement du système peut être assez fidèlement simulé à partir de la connaissance fine de la fonction  $L(i)$ .

En réalité ( voir 3-1 ), il est plus intéressant de faire apparaître l'inductance équivalente :

$$Leq(i) = L(i) + i.(dL/di)$$

Dans le cadre d'une approche pédagogique, il est intéressant d'offrir les aspects suivants :

- Donner accès à une expérimentation spectaculaire, source de mesures, notamment celle de la fonction  $L(i)$
- Fournir une "face avant" logicielle permettant aux étudiants de construire le modèle, sous forme de schémas blocs, en utilisant des outils de calcul non linéaires. L'utilisation d'un programme gratuit comme Scilab étant un atout certain (voir 3-1).
- Faire le lien avec les aspects théoriques de la ferorésonance. Etudier le comportement au "premier harmonique". Etudier les bifurcations entre les divers régimes permanents. Mettre en évidence l'existence de comportement subharmoniques et

chaotiques évoqués dans la littérature [1],[4],[5].

## 3. Construction du modèle non linéaire par schémas blocs utilisant le freeware "Scilab"

### 3-1) Description de l'étude

Le Logiciel *SCILAB*® est entièrement gratuit et peut être utilisé à travers une interface graphique développé par *Mr Ygorra*. Cette interface permet, entre autres, la résolution simplifiée d'équations différentielles grâce à l'utilisation de blocs de fonctions (fonctions quelconques, intégrateurs, dérivateurs). L'intérêt pédagogique de l'utilisation de cet outil réside dans le fait que les étudiants construisent leurs propres schémas directement après la mise en équation du problème. Les équations caractéristiques du circuit C sont rappelées ci dessous, on y fait apparaître l'inductance équivalente :

$$Leq(i) = L+i(t).dL/di$$

$$L \frac{di}{dt} = Ve(t) - R.i(t) - V_c(t) - i(t) \cdot \frac{dL}{di} \cdot \frac{di}{dt}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{Leq(i)} (Ve(t) - R.i(t) - V_c(t))$$

et :  $\frac{dV_c}{dt} = \frac{i(t)}{C}$

La figure 9 représente le schéma permettant de résoudre les équations du circuit C .

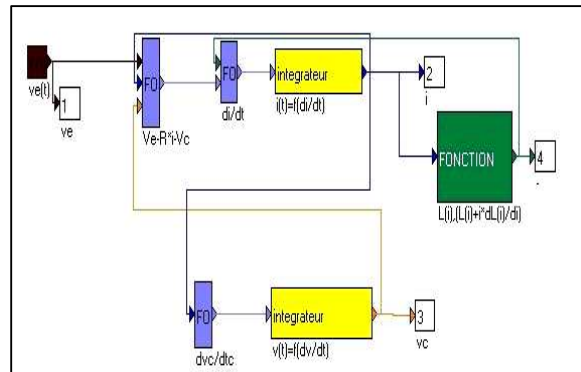


Fig 9 : schéma bloc de résolution de C

L'approche par schéma bloc consiste à boucler le calcul des différentes grandeurs en partant des intégrateurs reliant  $dx/dt$  à  $x(t)$ .

Le bloc "fonction" représente le bloc de calcul de  $L(i)$  et de  $dL(i)/dt$  à partir des données de la *figure 6-b*, permettant la construction de  $Leq(i)$ . La compilation de ce schéma permet de générer des fichiers de données utilisables par Scilab, fichiers qu'il suffit d'exploiter pour tracer l'évolution des différentes grandeurs.

Le graphe de la *figure 10-a* représente le résultat de la simulation correspondant à une rampe de valeur efficace de la tension d'entrée.

La *figure 10-b* représente l'évolution de  $Leq(t)$ .

La *figure 10-c* permet de comparer l'évolution de la valeur  $L(i)$  et celle de  $Leq(i)$ . On notera, au vu des différences notables entre les deux fonctions, l'importance de prise en compte de  $Leq(i)$ .

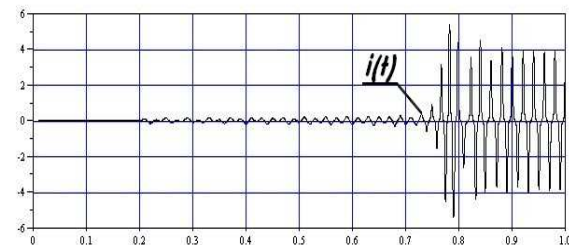
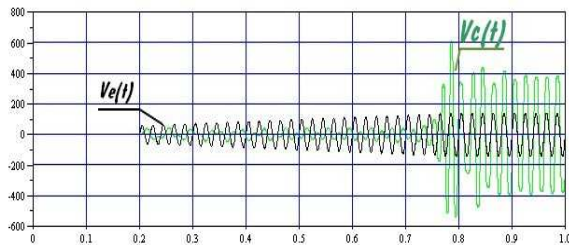


Fig 10-a: réponse à une rampe de  $V_e$

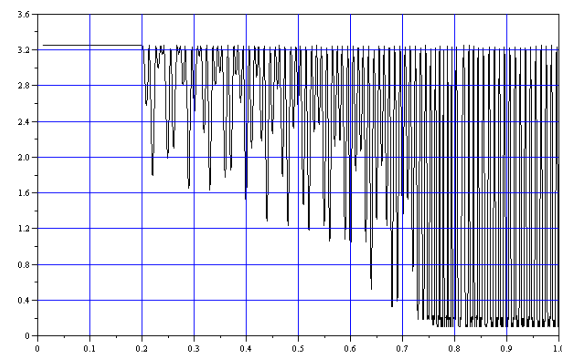


Fig 10-b :  $Leq(t)$

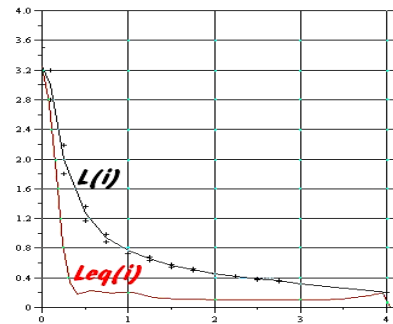


Fig 10-c :  $L(i)$  et  $Leq(i)$

### 3-2) Conclusion sur l'utilisation des schémas blocs

L'utilisation de l'interface graphique permet aux étudiants de construire pas à pas la résolution de l'équation différentielle. Il est, en effet, important pour eux de savoir aborder les équations différentielles en isolant les dérivées variables d'état du système. Ce travail constitue un bon exercice de mise en équation.

La construction du bloc "fonction" dans lequel on paramètre  $L(i)$  permet de construire au plus proche la non linéarité du système.

L'observation des différentes courbes permet de comprendre plus intimement l'importance de  $Leq(i)$  plutôt que celle de  $L(i)$  seule.

Pour finir, l'exploitation des résultats sous Scilab, notamment au niveau graphique, permet de se familiariser avec un outil gratuit de calcul et d'exploitation scientifique.

L'intégralité des logiciels et des fichiers utilisés est disponible sur le site :

<http://ferroresonance.free.fr>

## 4. Aspects théoriques de la ferrorésonance

Du raisonnement de type "premier harmonique" jusqu'à la théorie du chaos, les phénomènes non linéaires comme la ferrorésonance font l'objet de travaux mathématiques très divers. Il est intéressant de dégager de la littérature les grandes lignes des différents types de raisonnement

### 4-1) Etude au premier harmonique et condition de ferrorésonance

En négligeant la présence des harmoniques du courant  $i$ , et en supposant connue l'évolution de la tension  $V_L=f(i)$  du circuit C (voir figure 11), on peut analyser le fonctionnement du circuit par une méthode graphique [4,5].

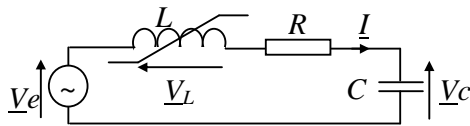


Fig 11 : circuit C

L'équation générale du circuit c peut s'écrire :

$$V_e(t) = R \cdot i(t) + \frac{d}{dt}(Li) + \frac{1}{C} \int i \cdot dt$$

En passant aux valeurs efficaces, l'équation devient :  $V_E^2 = (R \cdot I)^2 + (V_L - \frac{I}{C\omega})^2$

C'est à dire :  $\sqrt{V_E^2 - (RI)^2} = \left| V_L - \frac{I}{C\omega} \right|$

Le graphique de la figure 12 représente, dans un repère Tensions/Courants, les différentes grandeurs du **second** membre de cette équation.

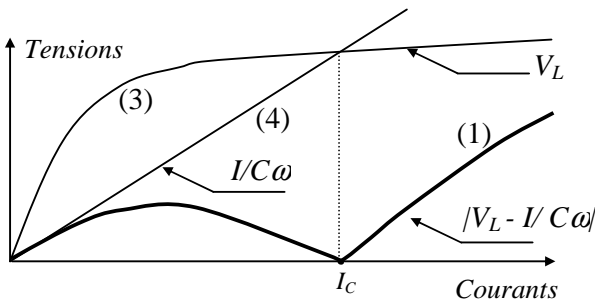


Fig 12

Le **premier** membre de l'équation a pour représentation graphique un arc d'ellipse (2) de demi grand axe  $V_E/R$  et de demi petit axe  $V_E$ , représenté sur la figure 13.

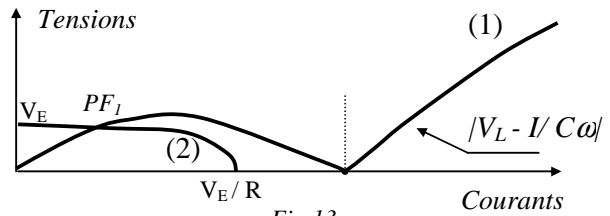


Fig 13

Dans le cas de la figure 13, le seul point de fonctionnement possible est celui noté  $PF_1$  et qui correspond à des valeurs basses de courant. En revanche, dès que  $V_E/R$  dépasse en abscisse l'intersection des courbes (3) et (4), le système présente trois points de fonctionnement dont deux stables (voir figure 14).

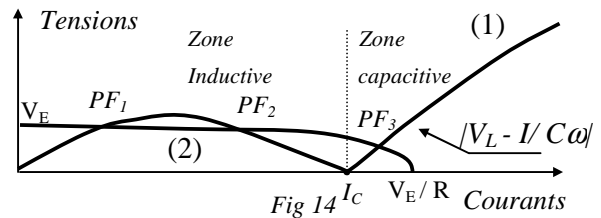


Fig 14

Le second point de fonctionnement stable ( $PF_3$ ), est celui de la ferrorésonance et présente des valeurs de courant beaucoup plus élevées qu'avant le saut de mode. On notera également le passage brutal d'un comportement de type inductif à un comportement de type capacitif, chose que l'on retrouve parfaitement dans la pratique.

Les conditions de ferrorésonance sont donc :

- Que la caractéristique  $V=I/C\omega$  coupe  $V_L(I)$
- Que R soit suffisamment petit pour que  $E/R > I_c$

On représente ainsi sur la figure 15 un exemple de circuit sans risque de ferrorésonance, en tout cas en ce qui concerne l'étude du premier harmonique des courants et tensions.

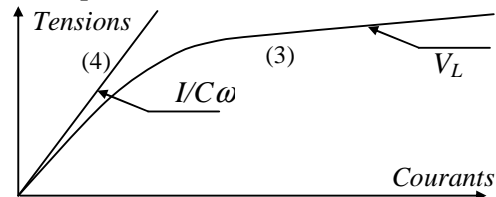


Fig 15

Il apparaît alors, pour une inductance saturable donnée, une valeur de capacité C critique en



dessous de laquelle il n'y a pas ferrorésonance. Le graphe de la *figure 16* présente le relevé des tensions de seuil  $V_H$  et  $V_L$  présentes sur la *figure 3* en fonction de la valeur de la capacité  $C$ .

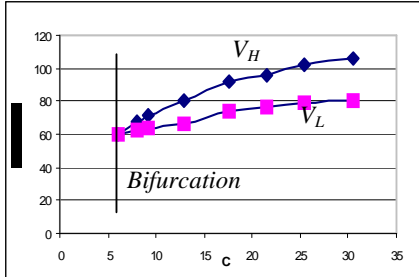


Fig 16:  $V_H$  et  $V_L$  en fonction de  $C$

Ce type de tracé fait particulièrement penser à un "graphe de bifurcation" dont on donne une définition ci dessous.

Un graphe de bifurcation est défini comme " le tracé d'une variable d'état d'un système dont l'évolution, en fonction d'un paramètre, décrit une branche différente pour chaque solution en régime permanent."

La *figure 16* reflète bien , à partir d'une certaine valeur de la capacité  $C$ , ici  $6\mu F$ , l'existence de deux régimes permanents différents, c'est à dire de deux branches distinctes.

#### 4-2) Comportements quasi-périodiques et subharmoniques

La littérature concernant la ferrorésonance met en évidence la propension de certains circuits à évoluer de façon subharmonique, quasi-périodique, voire chaotique [1]. Si la présence de bifurcations comportementales dans la ferrorésonance rend l'aspect "chaotique" peu surprenant en théorie, il est assez difficile, en revanche, de le faire s'exprimer en pratique.

Le montage monophasé étant assez limité sur ce point, il est apparu intéressant de visualiser les effets de la non linéarité de l'inductance en triphasé. D'après la littérature [5], l'apparition de comportements étranges semble possible grâce au montage de la *figure 17* qui représente un tronçon de réseau d'alimentation, avec transformateur à vide et capacités parasites.

Pour engager le régime "étrange", une des phases subit une sorte de "faux contact", ici un contact intermittent réalisé grâce à un interrupteur.

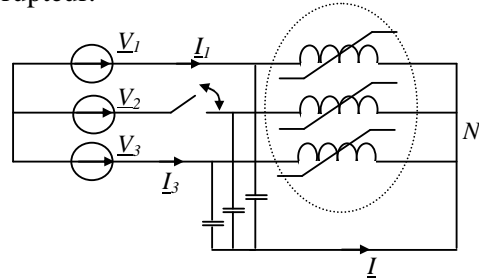


Fig 17 : circuit triphasé avec "faux contact" sur phase2  
Lors de l'action sur l'interrupteur, des transitoires singuliers apparaissent. En insistant, un régime permanent peut apparaître. A l'échelle de la période, le courant  $i(t)$  semble chaotique. Les courants de lignes, eux, semblent très bruités.

En observant la *FFT* des différents tensions et courants, il apparaît une forte présence harmonique et sub-harmonique (25Hz) au sein des différentes grandeurs (tensions et courants). Les oscillogrammes des *figures 18-a* à *18-d* représentent quelques unes des différentes grandeurs en régime permanent sub-harmonique.

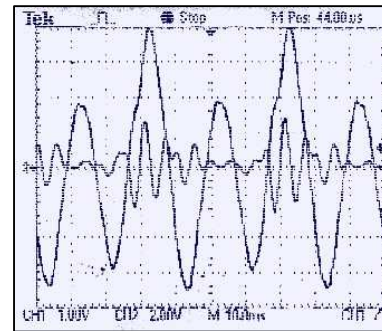


Fig 18-a : courant  $i(t)$  et tension  $Vc1(t)$

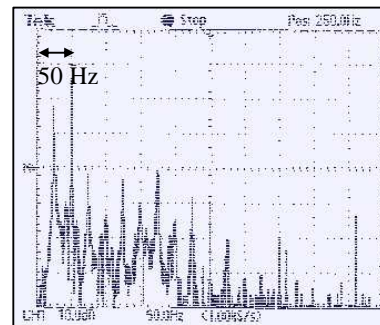


Fig 18-b : FFT de  $Vc1$

La FFT de la figure 18-b fait bien apparaître une composante subharmonique non négligeable à 25Hz. De plus, le montage fait un "bruit" répétitif, à environ 1Hz, que la FFT ne fait pas apparaître. En revanche, une observation à l'oscilloscope, à l'échelle de la seconde traduit très nettement une modulation de la tension (ici  $V_{c2}$ ) à environ 1Hz.

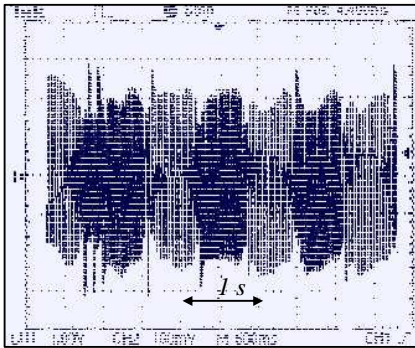


fig. 18-c :  $V_{c2}(t)$  à l'échelle de la seconde

Pour finir, on remarque que la fameuse composante à 25 Hz est également présente sur les courants de ligne, comme le représente la FFT du courant  $i_1$  de la figure 18-d.

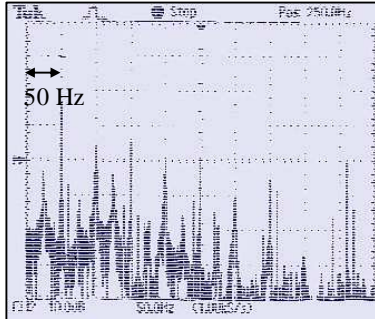


Fig 18-d : FFT de  $i_1$

#### 4-3) Conclusions

Si la ferrorésonance en monophasé semble tout à fait modélisable, il apparaît, en triphasé notamment, des régimes étranges très difficiles à analyser. Les comportements subharmoniques et chaotiques font aujourd'hui les sujets de recherches mathématiques poussées assez incompatibles avec une étude plutôt "physique" et pédagogique du phénomène.

En revanche, la présence de tels phénomènes au sein de circuits classiques en électrotechnique (surtout à l'échelle du réseau)

est un facteur d'ouverture d'esprit pour les étudiants. La nature du matériel et la facilité de la manipulation en fait un très bon sujet de démonstration en TP et l'occasion d'introduire, auprès des étudiants, le langage et les outils propres aux phénomènes non-linéaires, peu traités dans les formations classiques.

#### Références Bibliographiques et liens Internet

- [1] La ferrorésonance : cahier technique groupe *Schneider*  
<http://www.groupe-schneider.com/en/pdf/ect190.pdf>
- [2] Un logiciel de simulation de la ferrorésonance :  
<http://www.pqsoft.com/ferroview/>
- [3] Télécharger Scilab :  
<http://www-rocq.inria.fr/scilab/>
- [4] Leçons d'électrotechnique Vol II *Jean Fallou* chez Gauthier – Villars (1949)
- [5] Electrotechnique Tome 2 *François Cohen* Gauthier, Villars & Cie
- [6] Sites Internet : mot clé "Ferrorésonance" sur les pages France de *Google*

L'article complet ainsi que l'intégralité des logiciels et des fichiers utilisés est disponible sur le site : <http://ferrorésonance.free.fr>