

Etude et simulation des nouages cylindriques réguliers

LUC LASNE

Professeur Agrégé en sciences de l'ingénieur à l'Université de Bordeaux et membre IGKT

luc.lasne@u-bordeaux.fr

Résumé : l'objectif de ce texte est d'exposer une compréhension théorique générale des nœuds cylindriques réguliers appelés « bonnets turcs ». A travers l'étude de leur nouage « à plat », la mise en évidence de leurs propriétés permet de comprendre les règles mathématiques simples qui les régissent et ainsi de proposer une méthode générale de réalisation. Enfin, une approche en coordonnées polaires à l'aide du logiciel Scilab permet de générer n'importe quel modèle en 3D et d'en visualiser les différentes formes.

1. Généralités

Les nouages cylindriques réguliers, appelés communément « bonnets turcs », sont des nouages traditionnels, essentiellement décoratifs mais parfois utilitaires. Ce sont des sortes de tresses refermées sur elles mêmes dont la flexibilité permet des réalisations « à plat » ou encore façonnées de manière à recouvrir des volumes très divers. La *figure 1* présente quelques réalisations simples, certaines cylindriques, d'autres planes à la façon d'entrelacs ou encore recouvrant un manche d'outil.



Figure 1 : diverses formes de « Bonnets turcs »
(photographie de l'auteur)

Ce type de nouage induit une famille assez imposante de modèles différents, qui sont classés par les spécialistes sur la seule base de deux critères : le « **nombre de Lignes** » et le « **nombre de Boucles** ». Ces deux éléments **déterminent de façon unique** le nœud final, qu'il soit disposé sur un cylindre, un volume, ou à plat.

L'exemple de la *figure 2* suffit pour comprendre : le même nouage « 4 lignes 3 boucles » a été réalisé sous sa forme cylindrique standard et photographié vu de côté, vu par son bord, puis mis à plat. Sur la version cylindrique on identifie le nombre de lignes sur le côté et le nombre de boucles sur le bord, mais cet examen n'est pas toujours évident pour un débutant. En revanche,

sur la version à plat, le nombre de boucles apparaît clairement comme le nombre d'arcs extérieurs (et intérieurs également), ou encore le nombre de « pétales ». Le nombre de lignes se déduit également facilement d'une rapide observation : il suffit de partir du centre du nœud et de compter le nombre de spires croisées pour rejoindre l'extérieur.



Figure 2 : nouage cylindrique 4x3
(photographies de l'auteur)

Attention : Il ne faut pas prendre en compte le doublage des spires qui a été réalisé ici pour l'esthétique et la meilleure tenue du nœud. Traditionnellement les bonnets turcs sont toujours au moins doublés, et souvent triplés, quadruplés ou plus...

NB : Les « lignes » sont souvent appelées « torons » ou « spires », et les boucles « ganses ». Cependant, ces termes sont contestables et présentent le défaut de ne pas avoir les mêmes initiales que les termes Anglais « Lead » et « Bight » qui font consensus.

La réalisation pratique des bonnets turcs, consultable sur Internet (voir liens en fin d'article), fait l'objet de plusieurs méthodes pour chaque modèle, généralement « dans la main » du noueur, et qui nécessitent une mémorisation assez kinesthésique (par le mouvement). Si les spécialistes du genre dégagent une logique solide dans leurs réalisations, il faut tout de même avouer que celle-ci apparaît souvent « floue » au débutant, et ne permet pas toujours une démarche générale. Pourtant, ces nouages sont régis par une logique mathématique réellement simple, un principe systématique, qui apparaît

surtout dans la version à plat. Une fois compris, ce principe permet d'appréhender chaque modèle sans mémorisation préalable, ni recours à un tutoriel. Le principe permet surtout de comprendre l'origine des cas impossibles et des règles mathématiques qui sont à la base des trames utilisées pour les modèles imposants.

2. Analyse « à plat » du nouage xL 3B

Dans toute cette étude on notera :

- L : le nombre de lignes (Lead)
- B : le nombre de boucles (Bight)
- XL YB un nouage à X lignes et Y boucles (ou encore XxY).

Afin de comprendre simplement les principes généraux, consacrons nous à un cas simple constitué de trois boucles. La *figure 3* présente les trois « sommets » du nouage sur lesquels vont s'enrouler les spires du « brin courant ».

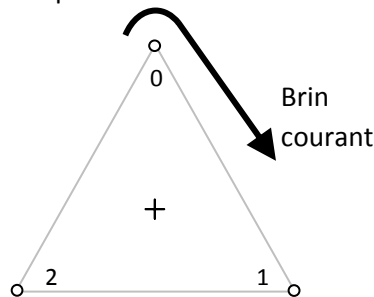


Figure 3 : 3 ganses et le brin courant

Dans ce cas volontairement simple, le nombre de boucles est donc : $B=3$.

Une question se pose alors : comment réaliser un nombre précis de spires au sein de ces sommets ?

Pour répondre à cette question, un simple test sur des cas élémentaires suffit. En effet, le nouage consiste à s'enrouler autour des points représentés pour former les boucles, tout en sautant un certain nombre de sommets pour passer d'une boucle à la suivante. La *figure 4* représente ainsi plusieurs cas :

Cas 1 : on passe du sommet 0 au **sommet 1**, puis au 2 et on reboucle au sommet 0. Un simple « tour mort » est obtenu, ou encore un bonnet turc peu représentatif : « **1 ligne 1 boucle** », 1x1 ou 1L1B.

Cas 2 : on passe du sommet 0 au **sommet 2**, puis on recommence l'opération du 2 au 1 pour reboucler ensuite au 0. Le nouage obtenu présente **2 lignes** et 3 boucles. C'est un bonnet turc 2x3, ou 2L3B. Pour respecter la logique du nouage, on dessine les spires passant dessus, puis dessous, en partant du premier sommet et en suivant le cheminement complet.

Cas 3 : on passe du sommet 0 au **sommet 3** ... qui n'est autre que le 0. Dans ce cas le nouage en

bonnet turc est « impossible » car il n'entoure pas tous les points prévus. L'analyse mathématique confirmera quels indices auraient pu nous conduire à détecter cette anomalie de prime abord.

Cas 4 : on passe du sommet 0 au **sommet 4**, c'est-à-dire qu'on réalise un tour complet (1, 2, 0), puis un autre sommet. Le renouvellement de cette opération pour les deux autres boucles conduit au bonnet turc représenté qui comporte ... **4 lignes**.

La logique apparaît ainsi de façon simple : à partir d'un certain nombre B de boucles prédisposées, pour obtenir un nombre X de lignes il **suffit de nouer la première boucle du sommet 0 au sommet X, et de renouveler l'opération « B fois »!**

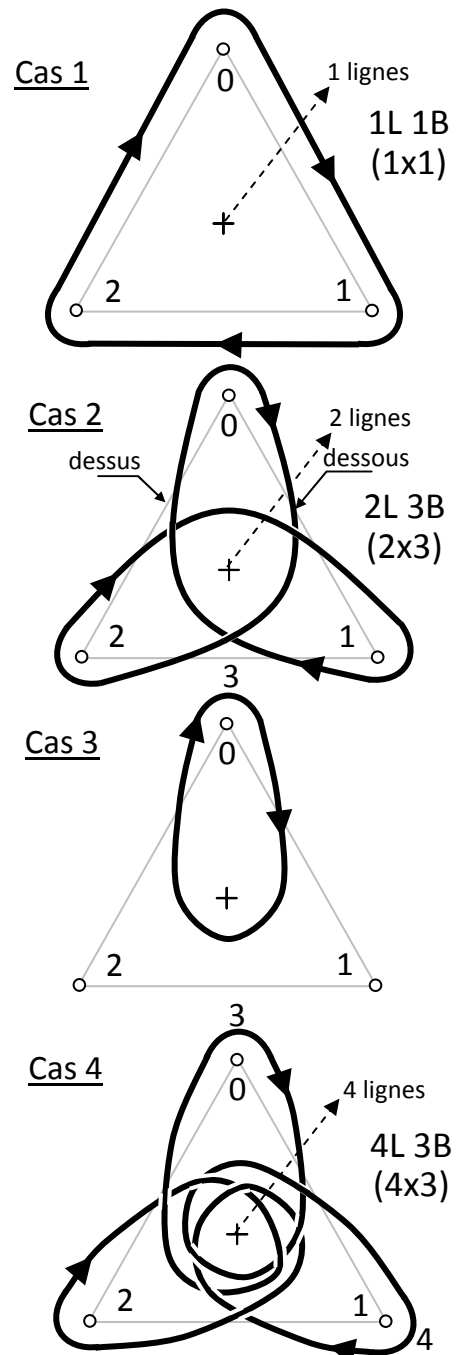


Figure 4 : nouages 1x1 , 2x3, impossible et 4x3

Ensuite, il convient de modifier le dessin pour noter les spires qui passent « dessus » et celles qui passent « dessous ». Le principe est là encore très simple : il suffit de partir d'un point donné du nouage, par exemple du contournement du point 0, et ensuite de noter alternativement le brin suivi en passant par dessus celui qu'il va croiser, puis dessous, puis dessus, etc. **Le schéma obtenu permet ainsi de réaliser le nouage pratique.**

La *figure 5* présente la réalisation correspondante du 4L3B étudié. La logique du nouage y apparaît clairement. Pour confirmer la validité de l'approche, le nouage de gauche a été réalisé avec une méthode traditionnelle (dans la main) et ensuite mis à plat. Le motif à plat fait alors exactement apparaître le motif d'entrelacement des spires prévu sur la *figure 4 - cas 4*.



Figure 5 : Bonnet turc 4x3 en cylindre et à plat
(photographies de l'auteur)

NB : La logique de « dessus dessous » se comprend plus facilement dans le cas 2 de la figure 4. Pour réaliser le nouage pratique, à partir du point de départ, il faut passer le courant par dessus le premier croisement, puis dessous, puis dessus. Cette règle simple d'itération s'appliquera à tous les nouages de bonnets turcs, y compris les plus complexes.

Intérêt de la méthode : outre le fait que cette façon de voir les bonnets turcs plaira à ceux qui y trouveront une présentation logique, la méthode présente un intérêt particulier : il devient possible de réaliser n'importe quel nouage XL YB en suivant **la démarche pratique** suivante :

- Réaliser un schéma présentant les Y boucles comme les Y sommets d'un polygone régulier.
- Noter le centre du polygone avec une croix.
- Noter les index des sommets en partant de 0 jusqu'à Y-1.
- Partir autour du point 0 et dessiner le brin courant passant en dessous des X-1 premiers sommets, et l'enrouler autour du sommet X.
- Recommencer l'opération à partir de ce nouveau point, puis du suivant, etc. jusqu'à revenir précisément autour du point 0.

- Pour finir, partir d'un point du nouage et suivre le brin courant en notant à chaque croisement qu'il passe dessus, puis dessous, puis dessus, etc. Le schéma obtenu est le schéma de nouage.

NB : Cette méthode est assez bien adaptée à un nombre de boucles B important, mais devient assez difficile à mettre en œuvre dès lors que le nombre L de spires dépasse le double de B. Dans ce cas là, les multiples tours au centre du nouage se croisent de façon compacte, ce qui ne facilite pas le suivi du brin courant et la détermination des passages dessus et dessous.

3. Propriétés mathématiques

La méthodologie étudiée pour le modèle à 3 boucles étant utilisable pour n'importe quels nombres de boucles et de lignes, la *figure 6* représente ainsi trois schémas réalisés sur le même principe et repérés par la nomenclature classique.

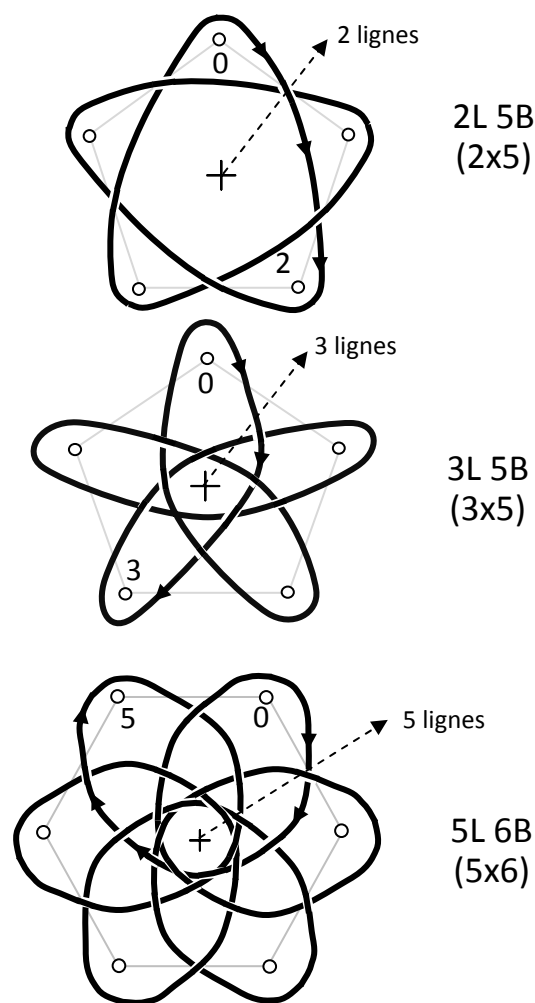


Figure 6 : Nouage à plat des 2x5, 3x5 et 5x6

L'exploitation du modèle à 5 boucles semble assez riche puisque rien n'empêcherait de le réaliser avec 4, 6, 7 ou presque n'importe quel nombre de

lignes. Pour s'en convaincre, il suffit de crayonner les dessins et de tourner toujours pour la première boucle jusqu'à l'index du nombre de spires désiré. En revanche, le modèle à 6 boucles présente un intérêt particulier, car il est le seul possible à réaliser avec $L < B$.

Pour s'en convaincre il suffit encore d'essayer de faire le dessin pour 2, 3, 4 ou 8 lignes. La pratique personnelle de ce petit exercice est très formatrice et permet de comprendre qu'une « logique de retour au point de départ prématuré » conduit à l'impossibilité d'entourer toutes les ganses prévues initialement. Les schémas obtenus seront ainsi conformes à ceux de la *figure 7* qui sont tous des cas impossibles basés sur le modèle à 6 boucles.

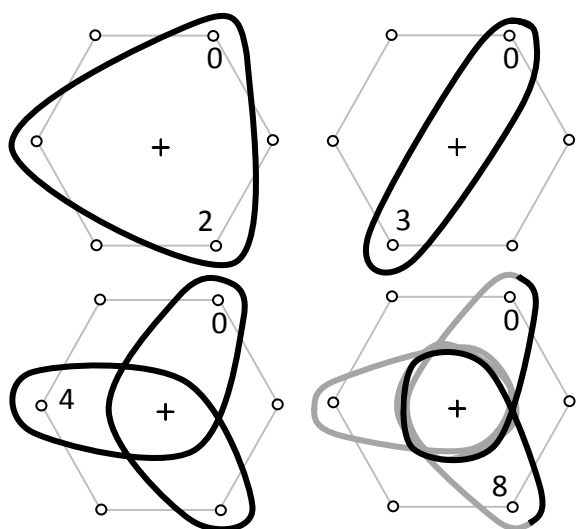


Figure 7 : Modèles impossibles à 6 ganses

Une question se pose alors : **comment analyser directement la faisabilité d'un modèle $XL YB$** , sans avoir à réaliser les schémas de nouage et d'aboutir à un succès ou un échec ? La réponse est relativement simple et repose sur les points suivants :

- Notons X le nombre de lignes et Y le nombre de boucles désirés.
- Si $X = Y$: en partant du point 0 du nouage, on fait le tour complet des points d'ancrage et on revient au point 0. L'opération terminée, on obtient un simple tour mort, ou encore un 1×1 souvent classé comme « modèle impossible ».
- Si $X < Y$: La première boucle entoure le X -ième point d'ancrage. Le modèle sera impossible si le second mouvement ramène au point initial, c'est à dire si $2.X = Y$. De la même manière le modèle serait impossible si $3.X = Y$, $4.X = Y$, etc. On peut alors généraliser en remarquant que le nouage sera impossible si « Y est un multiple de X ».

- En réalité $2.X$, $3.X$, $4.X$ etc. risquent de dépasser Y et il faut s'intéresser à ce qui se passe quand on réalise plus d'un tour, en une ou plusieurs fois.

- Si $X > Y$ (ou $2.X > Y$, etc.) l'opération de nouage consiste à tourner d'abord un tour entier (Y points), puis encore le nombre manquant ($X - Y$ points), pour arriver à X en tout. L'indice du point d'arrivée est donc $X - Y$ si on a tourné un tour autour du centre, $X - 2.Y$ si on a tourné deux tours, etc.

- L'opération mathématique associée à ce genre de calcul est la **congruence modulo Y** . Deux entiers X et X' sont dits « congrus modulo Y » s'ils ont le même reste par la division Euclidienne par Y , ceci étant noté $X \equiv X' \pmod{Y}$.

- Par exemple : 12 et 17 sont congrus modulo 5 car $12 = 5 \times 2 + 2$ et $17 = 5 \times 3 + 2$, et la notation classique s'écrira : $12 \equiv 17 \pmod{5}$. On remarquera alors que $12 \equiv 2 \pmod{5}$ et $17 \equiv 2 \pmod{5}$.

NB : L'exemple le plus connu d'arithmétique modulaire est un cadran de montre...qui donne l'heure modulo 12. Ainsi $15h \equiv 3h \pmod{12}$, ou encore $24h \equiv 0h \pmod{12}$.

Ainsi, dès que la rotation dépasse les Y boucles, le **nouage s'avère incomplet s'il existe un entier $b < Y$ tel que $b.X \equiv 0 \pmod{Y}$** .

(c'est exactement ce qui se produit dans tous les cas de la *figure 7*).

Cette équation revient à dire qu'il existe deux entiers positifs a et b tels que :

$$b.X - a.Y = 0$$

ou encore

$$b.X = a.Y$$

En général, la règle de conformité des bonnets turcs est énoncée de façon plus simple : « **Le nouage est incomplet si le nombre de spires et le nombre de boucles ont un diviseur commun (autre que 1), autrement dit si ils ne sont pas premiers entre eux** ».

Effectivement, dans le cas où X et Y ont un diviseur commun N , il existe deux entiers positifs a et b tels que :

$$X = N.a \quad \text{et} \quad Y = N.b$$

C'est à dire :

$$N = X/a = Y/b$$

Ou encore :

$$b.X = a.Y$$

On retrouve bien ici l'égalité à laquelle a conduit la règle du modulo.

Les deux formulations s'avèrent ainsi équivalentes et il conviendra d'en retenir la version la plus concise : **le nouage complet est possible si les nombres de lignes et de boucles sont premiers entre eux**.

4. Simulation en coordonnées polaires et représentation sous le logiciel Scilab

La logique du nouage étant finalement assez simple, il semble possible de l'utiliser pour programmer et automatiser la représentation des bonnets turcs pour des nombres quelconques de spires et de boucles (LxB).

Dans un premier temps, il convient de comprendre comment tracer facilement une courbe ressemblant à un enroulement dans un repère 2D. L'option choisie dans cet article est d'utiliser un logiciel de calcul mathématique comme Scilab ou encore Matlab, Octave, etc. (voir la dernière partie de l'article à ce propos). Dans ce domaine, et avec ce type de logiciel sous la main, l'utilisation des nombres complexes et particulièrement de leur notation polaire (formule d'Euler) s'avère très puissante.

Tracer une courbe en coordonnées polaires revient à tracer l'évolution du rayon vecteur correspondant au nombre complexe :

$$\underline{z} = r(\theta) \cdot \exp(i \cdot \theta)$$

NB : i (ou j en physique) est le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$.

La représentation de ce nombre complexe est un vecteur de module r et d'argument (d'angle) θ .

En faisant varier continument cet angle θ entre deux valeurs et en traçant le point repéré par le vecteur, on obtient une courbe tracée en coordonnées polaires.

Par exemple, sur la *figure 8*, l'angle θ du vecteur \underline{z} variant entre 30 et 90°, on trace continument le rayon $r(\theta)$ maintenu constant : on trace donc un arc de cercle...

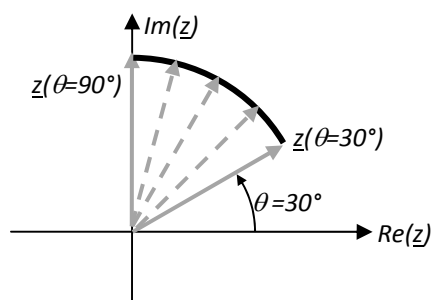


Figure 8 : Arc de cercle en coordonnées polaires

En faisant varier à la fois l'angle parcouru et le rayon $r(\theta)$ il devient facilement possible de tracer

une grande variété de courbes : cercles, ellipses, spirales, épicycles, etc.

Avec un logiciel comme Scilab, cela se programme de façon très compacte, en seulement trois étapes (en langage scilab):

1) définition d'un tableau contenant les valeurs de θ :

```
teta=linspace(valeur 1, valeur 2 , nombre de points);
```

2) calcul de la fonction $r(\theta)$ sur toutes les valeurs du tableau précédent :

```
Ex: r=1./(5+cos(teta));
```

3) calcul et représentation graphique des nombres complexes $\underline{z} = r(\theta) \cdot \exp(i \cdot \theta)$ (calculés pour toutes les valeurs des deux tableaux précédents)

```
z=r.*exp(i*teta);
plot2d(Real(z),Imag(z));
```

NB : chaque point tracé a pour coordonnées cartésiennes $Re(\underline{z})$ et $Im(\underline{z})$ dans le repère.

*NB : l'opération $\cdot *$ désigne la multiplication terme à terme des éléments des tableaux de valeurs. l'opération $\cdot *$ désignerait la multiplication matricielle.*

NB : Le code complet utilisé pour généraliser les nouages sous Scilab est fourni en partie 5.

La *figure 9* représente ainsi quelques tracés, correspondant à des fonctions $r(\theta)$ simples, ou encore à des compositions de plusieurs rayons vecteurs.

Les deux premières correspondent à une spirale et une ellipse, dont les équations polaires sont classiques. Assez faciles à retrouver, elles ne présentent pas d'intérêt majeur ici en dehors du fait de montrer que des figures assez diverses peuvent être abordées par ce type de calcul compact.

Les deux courbes du milieu de la *figure 9* correspondent à des « épicycles » : elles sont obtenues par la composition d'un premier vecteur tournant $\exp(i\theta)$ et d'un second tournant plus « rapidement », ici par exemple $\exp(5 \cdot i\theta)$. La modification des rayons des deux vecteurs permet alors d'obtenir des courbes qui commencent à ressembler à des nouages. Ce type de figure a longtemps été utilisé pour décrire les orbites des planètes du système solaire autour de la Terre, et il peut être amusant de leur trouver une ressemblance avec des schémas de nouages...

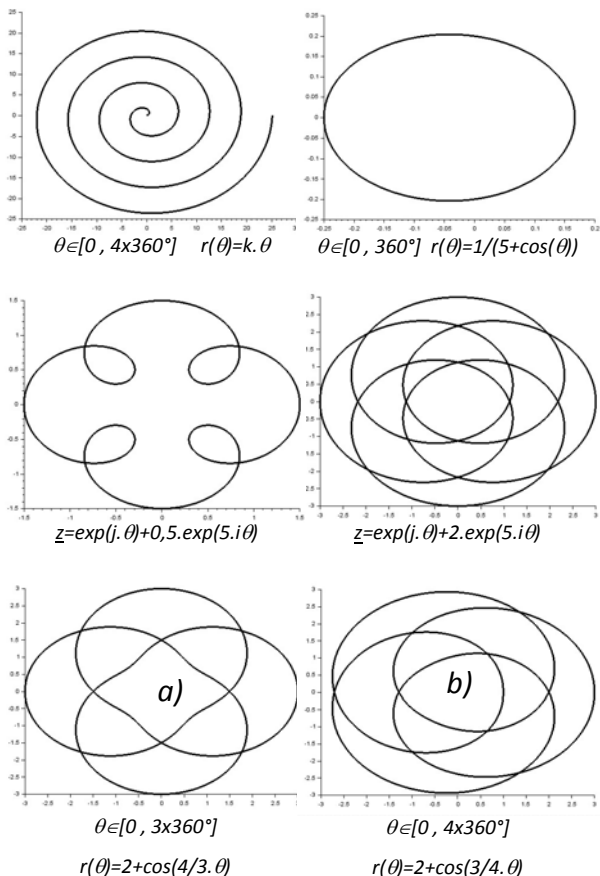


Figure 9 : Courbes diverses en coordonnées polaires

Les deux derniers exemples sont les plus intéressants car ils ressemblent véritablement à des nouages à plat et leur logique se dessine derrière leurs équations :

- Dans le cas a), le point courant décrit 3 tours, et le rayon évolue de façon cyclique (en cosinus) avec une période de 3/4 de tours. On obtient visuellement un bonnet turc L=3 B=4.
- Dans le cas b), le point courant décrit 4 tours, et le rayon évolue de façon cyclique avec une période de 4/3 de tours. On obtient visuellement un bonnet turc L=4 B=3, c'est-à-dire le modèle 4x3 de la figure 5.

Il apparaît donc assez clairement le moyen de généraliser le tracé des bonnets turcs.

De façon synthétique, pour représenter un nouage LxB :

- Les valeurs de θ doivent couvrir l'intervalle $[0, 2\pi.L]$.
- Le rayon s'écrira : $r(\theta) = 2 + \cos\left(\frac{B}{L} \cdot \theta\right)$.
- Ce qui permet de former le complexe $\underline{z} = r(\theta) \cdot \exp(i \cdot \theta)$ (le rayon vecteur)

NB : la valeur 2 dans l'équation de $r(\theta)$ a été fixée arbitrairement de manière à éviter que le rayon ne

s'annule quand le cosinus est négatif, et à ménager un espace libre au centre de la figure. Le choix de cette valeur dépendra aussi de l'aspect visuel désiré.

Une fois ces opérations implantées dans le code, il devient également possible de tracer le nouage en 3D. Pour cela, il faut rajouter une troisième composante, h , correspondant à l'étirement des spires le long de l'axe du nœud. Cet étirement étant cyclique, et de même période que les spires elles mêmes, on pourra lui donner l'écriture suivante :

- $h(\theta) = H \cdot \cos\left(\frac{B}{L} \cdot \theta\right)$.

Ainsi le tracé 3D reviendra simplement à l'affichage des points de coordonnées :

$$\left(\text{Re}(\underline{z}(\theta)), \text{Im}(\underline{z}(\theta)), h(\theta) \right)$$

La figure 10 représente ainsi, en tant qu'exemple, plusieurs vues 3D du nouage L=4 B=3 (4L 3B), qu'il sera possible de comparer avec les vues réelles des figures 2 et 5.

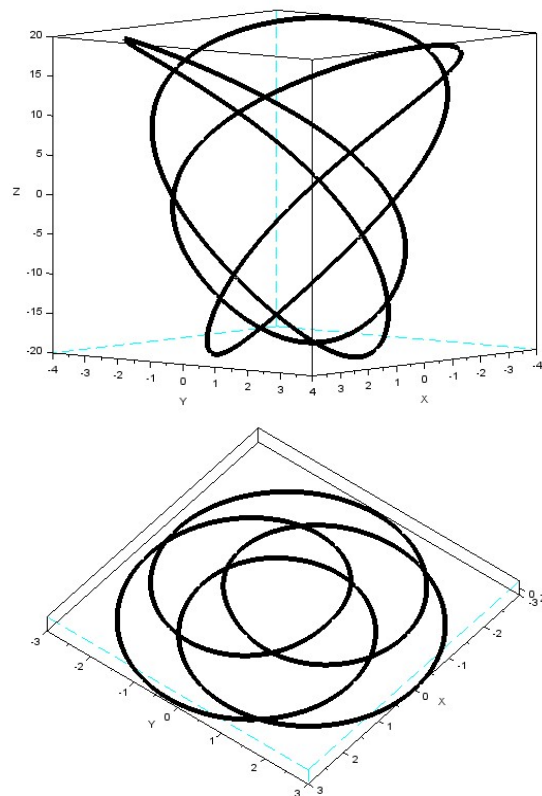


Figure 10 : Simulation du nouage 4L 3B

L'avantage de la vue 3D est qu'elle permet de prendre connaissance de l'allure cylindrique du nœud, tout aussi bien que de sa mise à plat, et ce de façon très fluide par quelques mouvements de la souris dans la fenêtre graphique.

Pour illustrer les possibilités de la simulation, la figure 11 présente des modèles plus complexes : 5x6 et 23x17, et ce à travers plusieurs vues.

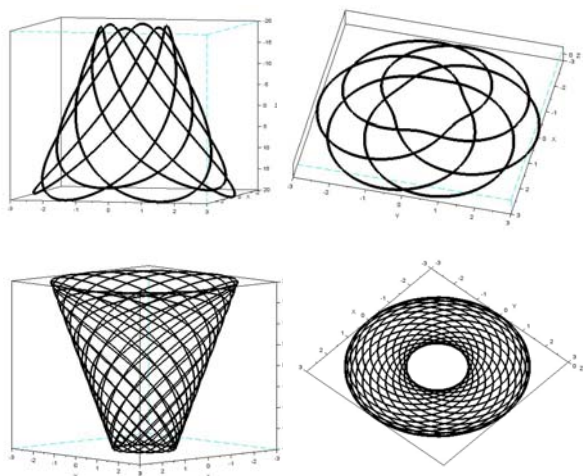


Figure 11 : Simulation des nouages 5x6 et 23x17

Ces figures ont un aspect très esthétique qui rappelle vraiment le côté harmonieux des nouages cylindriques réguliers. Elles s'avèrent même assez fascinantes quand on choisit des nombres importants de spires et boucles. En dehors de ces considérations pourtant, elles permettent surtout de valider totalement la logique de création et de nouage abordée précédemment.

Enfin, et ce de façon très pratique, il est possible de programmer les détections des passages « par-dessus » et « par-dessous » des différentes spires, et même de faire évoluer le tracé progressivement afin que le noueur suive le schéma « en direct » et puisse donc être guidé dans la confection d'un modèle, si complexe soit il.

5. Code source sous Scilab

Scilab est un logiciel libre spécialisé dans le calcul mathématique généraliste et essentiellement basé sur la puissance du calcul matriciel. Il est possible de le télécharger gratuitement : www.scilab.org
Le code complet utilisé pour la simulation évoquée dans cet article est très succinct et fourni ci-dessous :

```

/*****
// Dessin 2D ou 3D des bonnets turcs à L spires, B boucles
*****/
scf(1); // Sélection fenêtre graphique n°1
clf(); // Effacement de la fenêtre
i=%i; // déclaration de j (j^2=-1)
pi=%pi; // raccourci pour pi
L=4; // Nombre de Spires (Leads, Liens, Lignes, ...)
B=3; // Nombre de Boucles (Bights, ganses, ...)
H=20; // Hauteur du déroulé

teta=linspace(0,2*pi*L,10000); // Définition du tableau de
valeurs de l'angle teta : de 0 à 2pi. L sur 10000 points

```

```

r=2+cos(teta*(B/L)); // Calcul de l'évolution du rayon tracé
z=r.*exp(i*teta); // Calcul du nombre complexe (affixe)
longueur=H*cos(B/L*teta); // Calcul de la longueur le long de
l'axe

```

```

xset('thickness',3); // Sélection de l'épaisseur du trait
//plot2d(imag(z),real(z)); // Tracé de l'image à plat
param3d(imag(z),real(z),longueur); // Tracé de l'image en 3D
xset('thickness',1); // Epaisseur à 1 pour le reste de la figure

```

6. Liens

La communauté des personnes intéressées par les nœuds marins et des nouages décoratifs est assez importante et internationale. Parmi un grand nombre de liens, voici les plus sérieux :

- Le blog de Nico Matelotage, une référence: <http://www.nico-matelotage.com/>
- Tutoriel pour débutant du modèle 3L4B <https://www.youtube.com/watch?v=nlc-0h-fkZU>
- La chaîne Youtube « les nœuds marins par Marsala » présente un large panel de vidéos très pédagogiques permettant d'apprendre les nœuds, des plus utiles aux plus complexes et esthétiques : <https://www.youtube.com/c/noeudsmarinsparmarsala>
- IGKT : International Guild of Knot Tyers  IGKT France : <http://www.igkt.fr/>
- Le logiciel "Ariane" utilise un algorithme pour calculer tous les nœuds cylindriques imaginables c'est à dire mono et multi brins. <http://riccodev.com/matelotage.html>
- Le site mathcurve.com répertorie aussi les « bonnets turcs » sous le nom de « nœud de billard cylindrique » : <http://www.mathcurve.com/courbes3d/billardcylindrique/billardcylindrique.shtml>
Attention aux notations qui sont différentes : le 4x3 donne un (3,4) sur l'exposé de mathcurve.
- Parmi les nombreux livres dédiés au nœuds :
 - « Comment réussir tous ses nœuds », Des Pawson - Hachette pratique
 - « Knots, the complete visual guide », Des Pawson - DK
 - « Les noeuds, le grand livre pratique », Geoffrey Budworth- Les éditions de l'homme

- « Le grand livre des nœuds »,
C. Ashley Gallimard

Enfin, la phase de relecture de l'article par reviewers de Quadrature a permis de déceler les deux liens suivants, où l'auteur (membre IGKT) expose une modélisation très proche de celle abordée ici, et de beaux graphiques 3D colorés :

- Skip Pennock, Turk's-head Knots (Braided Band Knots) a Mathematical Modeling, VisMath 7_4 (2005).
<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/pennock1/index.html>
- Skip Pennock, Of Torus and Turk's-Head Knots: A Polar Trigonometric Modeling, VisMath 6_4 (2004).
<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/pennock/index.html>