

# Les équations paramétriques des nœuds communs

LUC LASNE

Professeur Agrégé, UF SDI Université de Bordeaux

[luc.lasne@u-bordeaux.fr](mailto:luc.lasne@u-bordeaux.fr)

**Résumé :** l'objectif de cet article est d'étudier les courbes décrites par les nœuds communs à travers la détermination de leurs équations paramétriques. L'analyse du cheminement du brin courant de plusieurs types de nœuds connus de tous conduit à une méthode permettant de déterminer les jeux d'équations et de simuler les tracés de façon réaliste. La modélisation, qui intègre le calcul des vecteurs du repère de Frenet permet aussi de calculer les longueurs des brins, leur courbure, d'en déduire des informations sur leur complexité, leur résistance à la rupture et tout simplement d'analyser sous un aspect mathématique des objets du quotidien.

## 1. Généralités

Les nœuds « communs », comme ce nom l'indique, sont à peu près connus de tous. En lançant ses chaussures, en attachant une corde à un arbre ou en fermant un sac, tout un chacun compose couramment de l'ordre de 5 à 6 nœuds simples, et ce depuis le plus jeune âge. Pourtant le monde des nœuds cache une diversité tout à fait remarquable. Il faut savoir que les ouvrages pratiques de référence dédiés aux nœuds font état de quelques 3800 modèles et que, par ailleurs, les domaines scientifiques où les nœuds sont étudiés sont également très divers : biologie, génétique, physique fondamentale et appliquée, et même ... mathématiques où on formalise les nœuds et les tresses pour leurs propriétés, leurs invariants, leurs éléments premiers, etc.

Mathématiquement parlant, et sans même s'appuyer sur la « théorie des nœuds » actuelle, il suffit d'un peu d'observation pour se rendre compte que les nœuds sont des objets rapidement complexes. Ils forment par ailleurs un ensemble assez fourni pour lequel émerge forcément une volonté de classification, de repérage et de modélisation.

Dans ce cadre, l'objectif de cet article est de déterminer les équations paramétriques de certains nœuds simples pour en extraire diverses possibilités de calcul, de visualisation en 3D et de modélisation à des fins diverses.

## 2. Identification des équations

Pour commencer, considérons les quatre nœuds communs représentés sur la *figure 1* : le nœud simple, le nœud de huit, le nœud de cabestan et le nœud plat. Chacun de ces modèles

est formé par des « va-et-vient » en trois dimensions du « brin courant » qui le constitue.

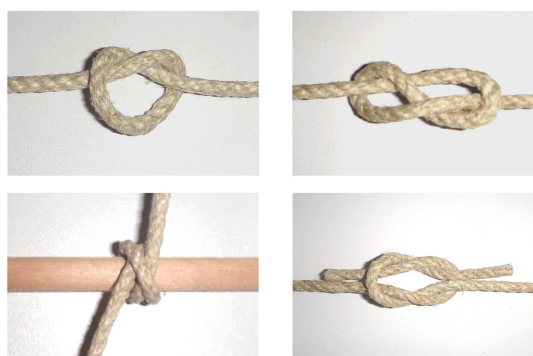


Figure 1 : Quatre nœuds « communs »

Pour les étudier, nous choisissons un repère orthonormé pour identifier les cheminements dans différents plans d'observation.

### Nœud simple

La *figure 2* détaille le nœud simple vu de dessus, c'est-à-dire face au plan  $(0,x,y)$ , puis vu du côté c'est-à-dire face au plan  $(0,x,z)$ .

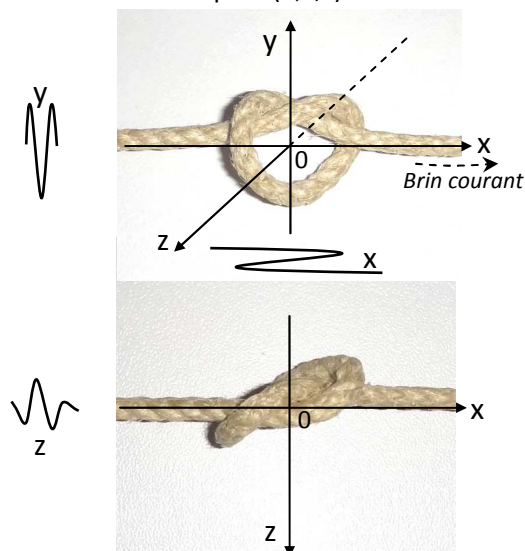


Figure 2 : Nœud simple et repère

Durant le cheminement du brin courant, il est possible d'analyser indépendamment les évolutions des coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  qui sont représentées de façon symbolique par les petites oscillations disposées à côté des axes. Visualisons par exemple la seule coordonnée  $y$  : elle croît tout d'abord, pour ensuite passer en valeurs négatives et recroître vers des valeurs positives par la suite. En observant de même  $x$  et  $z$ , on peut se convaincre des points suivants :

Au fil de la formation du nœud :

- $x$  décrit **une période** complète d'oscillation
- $y$  décrit **une période et demi**
- $z$  décrit **deux périodes**

Ainsi, les équations paramétriques a priori du tracé du nœud pourraient s'écrire :

$$t \in [0, 2\pi] : \begin{cases} x = \sin(t) \\ y = \sin(1,5.t) \\ z = \sin(2.t) \end{cases}$$

La *figure 3* représente la courbe correspondante réalisée sous le logiciel Scilab®, sur laquelle l'évolution du paramètre  $t \in [-0,5 ; 2,2 \times \pi]$  apparaît par la colorisation du plus foncé (début du tracé) vers le plus clair (fin du tracé).

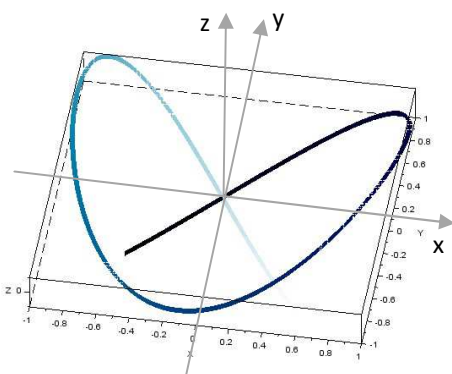


Figure 3 : Simulation a priori du nœud simple

Le « problème » que pose alors cette courbe est la superposition des points courants correspondants aux valeurs  $t=0$  et  $t=2\pi$ . Pour éviter cela, et pour concrétiser le fait que les brins du véritable nœud ne se croisent ni ne se traversent en réalité, il est possible de rajouter un décalage non périodique à une des coordonnées comme dans l'exemple ci-dessous :

$$t \in [0, 2\pi] : \begin{cases} x = \sin(t) + k_x.t \\ y = \sin(1,5.t) \\ z = \sin(2.t) \end{cases}$$

La *figure 4* représente ainsi le résultat obtenu avec  $k_x = 0,1$ .

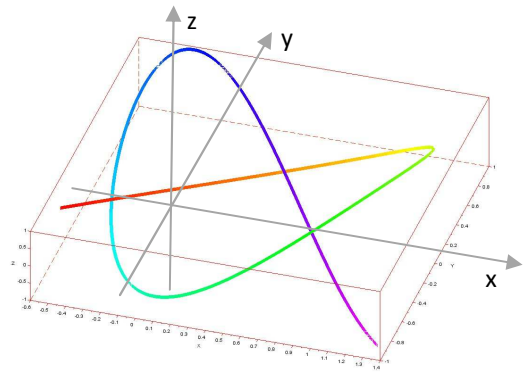


Figure 4 : Simulation correcte du nœud simple

Cette simulation là donne une forme intéressante où on reconnaît bien les circonvolutions du nœud simple. Bien sûr la visualisation en 3D dans la fenêtre graphique de Scilab est beaucoup plus intéressante et convaincante...

### Nœud de huit

De la même manière que pour le nœud simple, la *figure 5* représente les vues de dessus et de côté du nœud de huit, bien connu des alpinistes.

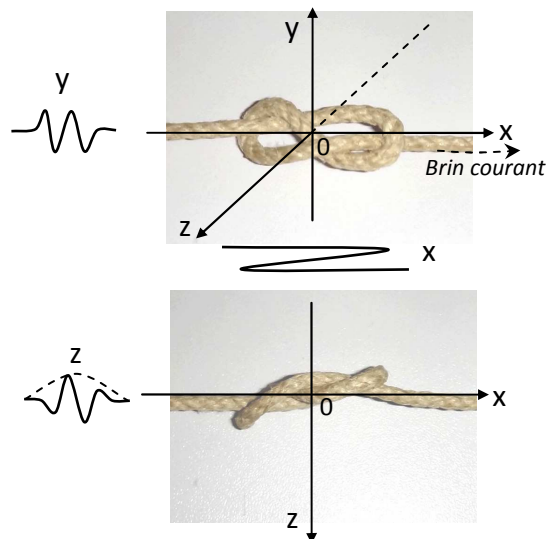


Figure 5 : Nœud de huit

Les oscillations simplifiées des trois coordonnées sont également notées, et il y apparaît : **une période** pour  $x$ , **deux périodes** pour  $y$  et **deux périodes** pour  $z$ . Ce qui conduit à l'écriture des équations paramétriques a priori :

$$t \in [0, 2\pi] : \begin{cases} x = \sin(t) + k_x.t \\ y = \sin(2.t) \\ z = \sin(2.t) \end{cases}$$

Le tracé résultant de ces équations est représenté sur la *figure 6*, où la forme du nœud de huit apparaît bien vue « de dessus », mais fait apparaître une difficulté dans la vue de côté. En

effet, étant donné que  $\forall x, y = z$  dans le jeu d'équations, la courbe dans son ensemble est contenue dans le plan d'équation  $y = z$  (le plan contenant  $(O,x)$  incliné à  $45^\circ$  par rapport aux deux autres axes), comme le confirme la *figure 6*. Le nœud perd alors son côté réaliste en trois dimensions, et on s'intéresse à corriger cet aspect en faisant osciller le brin de façon à ce qu'il sorte de ce plan, et qu'ainsi les différents enroulements ne se croisent pas.

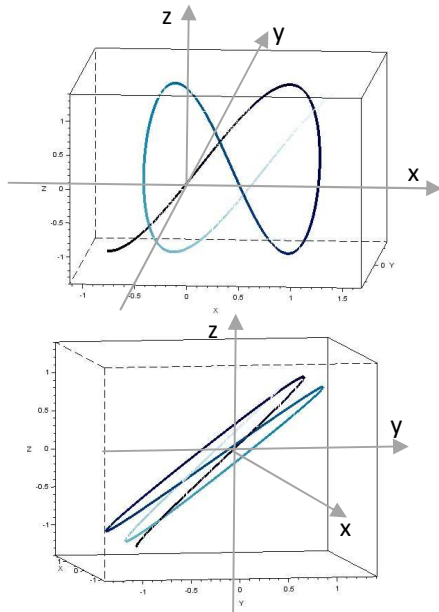


Figure 6 : Simulation du nœud de huit

L'analyse du plan  $(O,x,z)$  de la *figure 5* montre qu'un détail n'a pas été exploité : la première et la dernière oscillation de la coordonnée  $z$  sont de bien plus faible amplitude que la deuxième et la troisième. Tout se passe comme si la coordonnée  $z$  était « modulée » par une courbe en cloche, représentée en pointillés sur la *figure 5*, décrivant une demi-période positive lors de l'évolution du paramètre  $t$ . Il suffit alors de multiplier la coordonnée  $z$ , par exemple, par  $\sin(t/2)$  pour obtenir une courbure bien plus marquée sur les deuxième et troisième points de rebroussement.

Les équations deviennent ainsi :

$$t \in [0, 2\pi] : \begin{cases} x = \sin(t) + k_x \cdot t \\ y = \sin(2 \cdot t) \\ z = \sin(2 \cdot t) \cdot \sin(t/2) \end{cases}$$

Le coefficient  $k_x$  servant encore à décaler légèrement les brins dans leurs passages successifs, la *figure 7* représente ainsi la courbe obtenue avec  $k_x = 0,1$ . On y constate l'allure très réaliste du nœud où les passages par-dessus et par-dessous des brins sont bien visibles à l'aide de la colorisation changeante.

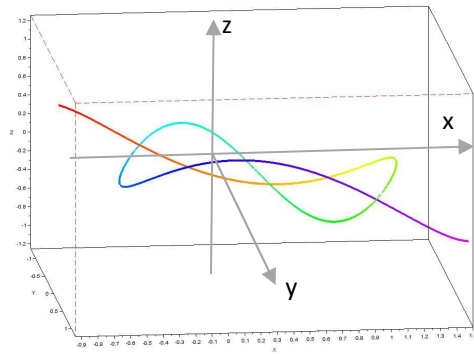


Figure 7 : Simulation correcte du nœud de huit

En utilisant la même méthode d'analyse, il est alors possible de s'attaquer sans trop de difficulté aux deux autres nœuds de la *figure 1*.

### Nœud plat

Les équations du nœud plat se déduisent facilement de l'analyse d'une seule boucle, les équations de la seconde boucle étant déduites par symétrie d'axe  $(O,y)$ . La *figure 8* représente le nœud plat vu de dessus, du côté et agrémenté des oscillations symboliques de ses coordonnées.

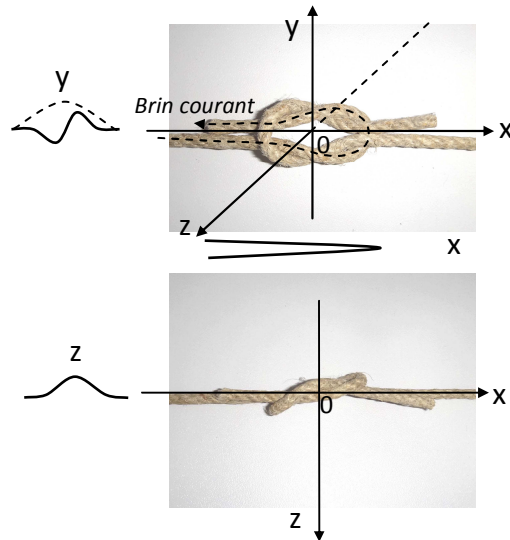


Figure 8 : Nœud plat

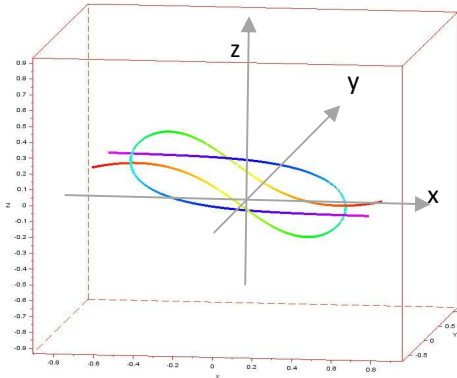
Sans trop entrer dans les détails, les périodes d'oscillation des deux brins (une demie, une et une demie), et un peu d'ajustement des coefficients de la coordonnée  $z$  permettent d'écrire les équations suivantes pour :

$$t \in [0, 2\pi] \begin{cases} x_1 = \sin\left(\frac{1}{2} \cdot t\right) - \frac{1}{2} \\ y_1 = -\sin(t) \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot t\right) + k_y \cdot t \\ z_1 = -k_z \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot t\right) + 0,15 \end{cases}$$

Et :

$$\begin{cases} x_2 = -\sin\left(\frac{1}{2} \cdot t\right) + \frac{1}{2} \\ y_2 = -\sin(t) \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot t\right) + k_y \cdot t \\ z_2 = k_z \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot t\right) - 0,15 \end{cases}$$

A partir de ces équations, la *figure 9* représente la vue du tracé en 3D réalisé pour  $k_y = 0,05$  et  $k_z = 0,4$ .

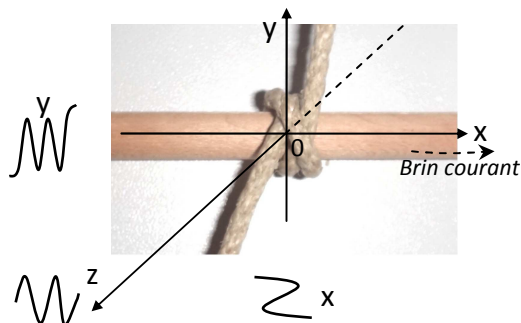


**Figure 9 : Simulation du nœud plat**

L'allure obtenue est très réaliste lorsqu'on la visualise dans la fenêtre graphique en 3D et les valeurs numériques d'ajustement qui apparaissent dans les coordonnées ( $k_y, k_z, 0,15$ ) sont simplement déterminées par tâtonnement de manière à avoir une courbure et des positions relatives convenables pour les deux brins.

### Nœud de cabestan

La *figure 10* détaille enfin le nœud de cabestan vu de face, dans le plan (0,x,y), ainsi que les oscillations simplifiées de ses trois coordonnées.



**Figure 10 : Nœud de cabestan**

Le jeu d'équations qu'on tire des oscillations des coordonnées correspond au système suivant :

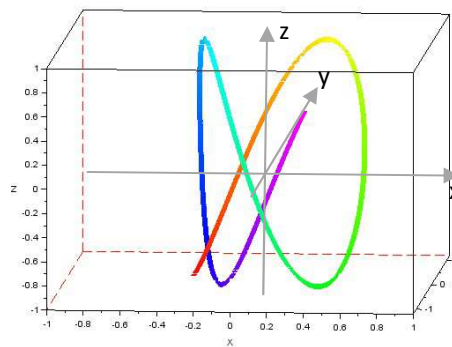
$$t \in [0, 2\pi] : \begin{cases} x = \sin(t)/2 + k_x \cdot t \\ y = -\cos(2 \cdot t) \\ z = \sin(2 \cdot t) \end{cases}$$

Avec ces équations, l'allure est correcte mais le croisement des trois brins sur le dessus, autrement

dit pour  $t = \pi$ , se fait en un même point et les brins se croisent plutôt que de se superposer. Afin que le brin qui enlace et bloque ce croisement passe « par-dessus » les deux autres, on rajoute à une des coordonnées (y ou z) un terme qui la « surélève » pour  $t = \pi$ , par exemple :  $\cos(t - \pi)$ . Le nouveau jeu d'équations devient donc :

$$t \in [0, 2\pi] : \begin{cases} x = \sin(t)/2 + k_x \cdot t \\ y = -\cos(2 \cdot t) - \cos(t - \pi) \cdot k_y \\ z = \sin(2 \cdot t) \end{cases}$$

La *figure 11* représente la courbe obtenue avec les variables d'ajustement suivantes :  $k_y = 0,1$  et  $k_z = 0,033$ .



**Figure 11 : Simulation du nœud de cabestan**

### **3. Simulation 3D réaliste etrepère local**

Le manque de réalisme des tracés précédents repose sur le fait que les cheminements des brins sont réduits à une courbe sans épaisseur, sans volume. Un nœud est pourtant un véritable objet en trois dimensions, où les brins forment des « torons » qui s'appuient les uns sur les autres lors du serrage.

Afin de conférer un aspect « toronné » au nœud, il convient alors de le représenter par plusieurs brins parallèles en tournant le brin central, et distants de ce dernier du rayon du toron désiré. La problématique consiste alors à trouver les équations des différents torons à partir de celle du brin principal.

### Vecteurs tangent et normaux

La *figure 12* représente une portion de courbe appelée  $\mathcal{C}(t)$ , où  $t$  est le paramètre des trois coordonnées  $x, y$  et  $z$  du point  $M$ . On souhaite, autour de cette courbe, représenter des brins parallèles formant un toron. Pour ce faire, il faut tout d'abord trouver le vecteur  $\vec{T}$  tangent au déplacement au point  $M$ .

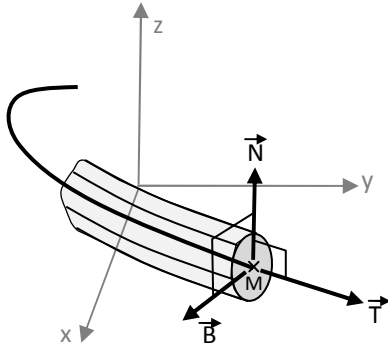


Figure 12 : Vecteurs tangent et normaux

Ce vecteur tangent est tout simplement le vecteur dont les coordonnées sont les dérivées par rapport à  $t$  des trois coordonnées du point courant

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}. \text{ Il s'écrit : } \vec{t} \begin{cases} x_t = \frac{dx}{dt} \\ y_t = \frac{dy}{dt} \\ z_t = \frac{dz}{dt} \end{cases}.$$

NB : dans les simulations numériques, les coordonnées de la trajectoire constituent une suite finie de nombres mémorisés dans un « vecteur »  $(x_n, y_n, z_n)$ . Le vecteur tangent d'indice  $n$  se calcule alors en écrivant :

$$\vec{t}_n \begin{cases} x_{t_n} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} \\ y_{t_n} = \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} \\ z_{t_n} = \frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta t} \end{cases}$$

où  $\Delta t$  est le pas de simulation du paramètre  $t$ .

Il suffit alors de normaliser ce vecteur pour

obtenir :

$$\vec{T} = \frac{\vec{t}}{\|\vec{t}\|} = \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{pmatrix}$$

A partir de là, un premier vecteur normal au

déplacement s'écrira :

$$\vec{n} \begin{cases} x_n = z_T - y_T \\ y_n = x_T - z_T \\ z_n = y_T - x_T \end{cases}.$$

Ce vecteur est tout simplement un vecteur dont les coordonnées vérifient  $\vec{T} \cdot \vec{n} = 0$ .

On le normalise ainsi en calculant :  $\vec{N} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ .

Un second vecteur normal pourra enfin se déduire des deux premiers en opérant le produit vectoriel  $\vec{b} = \vec{T} \wedge \vec{N}$ , autrement dit :

$$\vec{b} \begin{cases} x_b = y_T \cdot z_N - z_T \cdot y_N \\ y_b = z_T \cdot x_N - x_T \cdot z_N \\ z_b = x_T \cdot y_N - y_T \cdot x_N \end{cases}$$

Le vecteur  $\vec{B} = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ , qui sera unitaire, permet alors de finaliser la construction du repère local.

L'ensemble de ces trois vecteurs, dont la construction est somme toute très intuitive,

constitue le « repère de Serret-Frenet » bien connu dans l'étude des courbes gauches.

### Mise en volume des brins

Une fois les vecteurs  $\vec{N}$  et  $\vec{B}$  connus en chaque point de la courbe, les positions des  $N$  brins parallèles au brin central, formant un « toron » de rayon  $R$ , peuvent être calculées facilement.

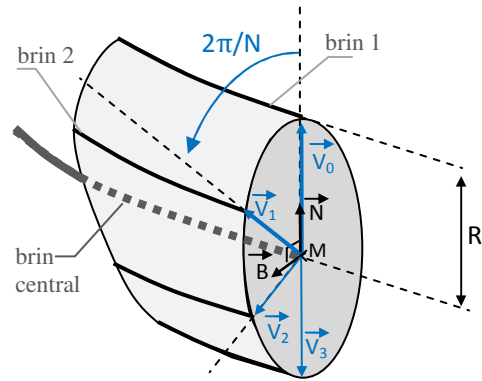


Figure 13 : Génération des torons parallèles

Il suffit en effet, comme le montre la figure 13, de translater le tracé du brin central par les vecteurs :

$$\vec{V}_k = R \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{N}\right) \cdot \vec{N} + R \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{N}\right) \cdot \vec{B}$$

$$k \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$$

Pour ce tronçon élémentaire, le résultat obtenu est un « entourage » régulier du brin central par  $N$  brins identiques et localement « parallèles ».

En réalisant le tracé complet du nœud en un grand nombre de petits tronçons tels que celui détaillé sur la figure 13, on obtient une représentation « toronnée » du nœud qui figure bien l'allure et le volume occupé par le brin courant d'un nœud réel.

En termes plus clairs, le repère des vecteurs  $\vec{N}$  et  $\vec{B}$  n'est valable que localement pour tracer les brins parallèles. Leur calcul doit donc être fait pour de « petites variations » du paramètre  $t$ , ce qui impose que la simulation numérique soit faite avec un pas de calcul relativement petit et donc un nombre de segments élémentaires « assez grand ».

Le résultat obtenu apparaît sur la figure 14 qui représente la simulation complète du nœud de huit issu des équations précédentes. La partie « zoomée » illustre les détails des différents torons entourant le brin central.

Les figures 15 à 17 représentent à la suite les allures du nœud simple, du nœud plat et du nœud de cabestan mis en volume et colorisés.

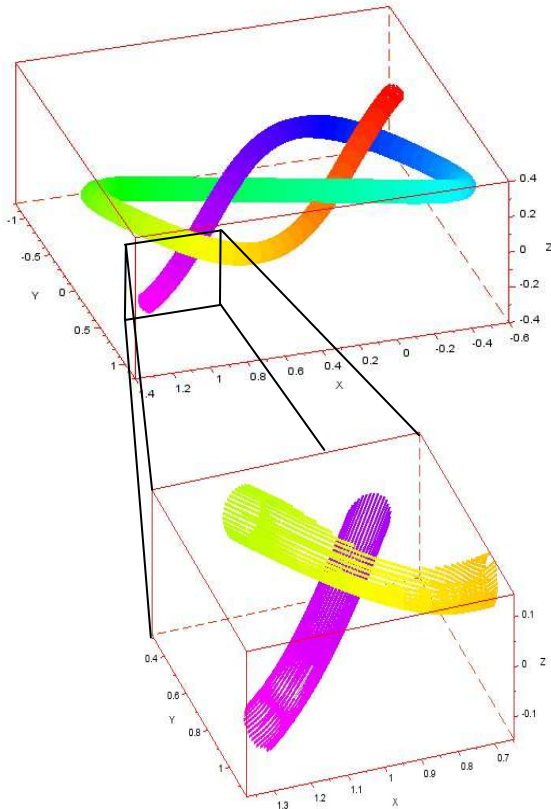


Figure 14 : Simulation du nœud de huit toronné

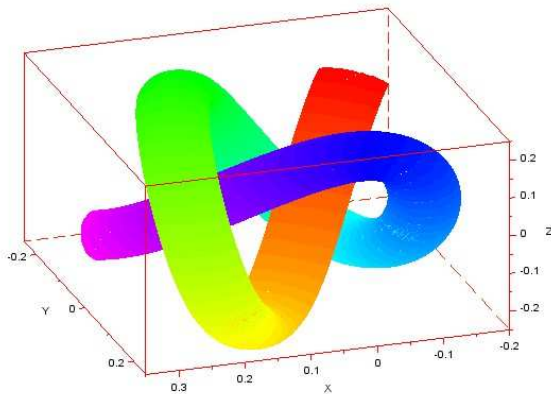


Figure 15 : Simulation du nœud simple toronné

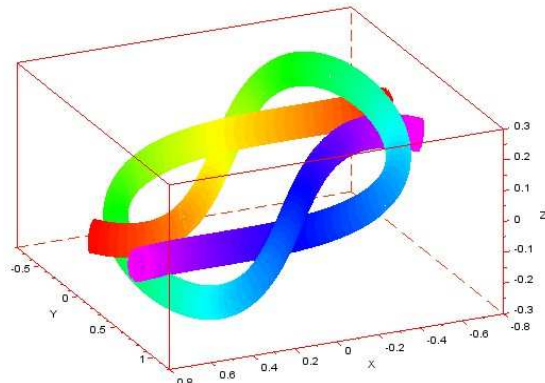


Figure 16 : Simulation du nœud plat toronné

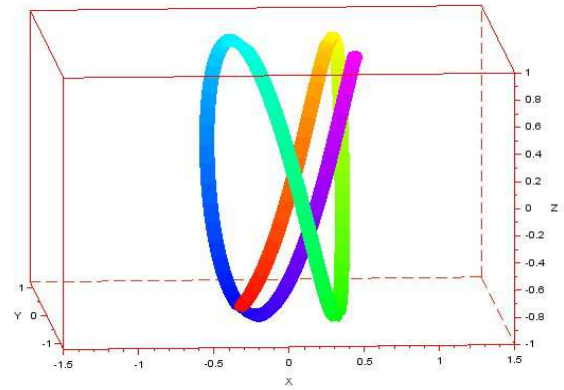


Figure 17 : Simulation du nœud de cabestan toronné

#### 4. Calcul delongueur et rapport longueur/diamètre

L'avantage, dans le fait de disposer des équations de la courbe, et de décomposer son calcul et son tracé en un grand nombre de petits segments, est de pouvoir facilement déterminer les grandeurs spatiales telles que la courbure, la longueur totale, ou encore le rapport « longueur sur diamètre ».

La longueur d'une courbe en trois dimensions cheminant entre les points A et B s'écrit comme l'intégrale curviligne suivante :

$$\mathcal{L} = \int_{AB} ds \quad \text{où} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

NB : En d'autres termes, la distance totale que parcourt la courbe peut être vue comme la somme continue des distances des segments infinitésimaux décrits dans le repère de coordonnées.

Dans les simulations numériques sous Scilab précédentes, les coordonnées calculées sont stockées sous la forme de tableaux de valeurs.

Par exemple pour le nœud simple, le calcul des trois coordonnées s'écrit de façon compacte :

```
t=linspace(t_init,t_final,Nmax);
x=0.2*(sin(1*t)+t/10);
y=0.2*sin(1.5*t);
z=-0.2*sin(2*t);
```

Dans ce cadre, t, et donc aussi x, y et z sont des tableaux (vecteurs) de  $N_{\max}$  éléments.

La détermination des écarts élémentaires dus à chaque pas de calcul s'écrit également de façon très compacte. En effet, en soustrayant terme à terme les éléments du tableau de x à partir du rang 1, à ceux du même tableau mais décalé à partir du rang 2, on calcule directement et sur  $(N_{\max}-2)$  points les écarts dx. De même pour y et z :

```
dx=x(2:Nmax)-x(1:Nmax-1);
dy=y(2:Nmax)-y(1:Nmax-1);
```

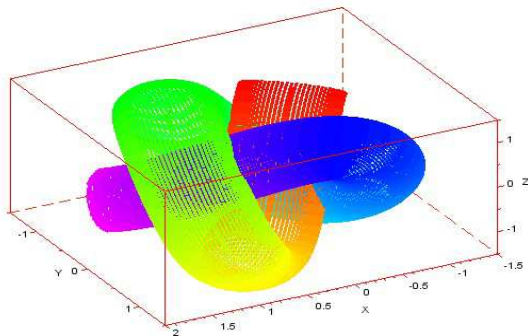
```
dz=z(2:Nmax)-z(1:Nmax-1);
ds=sqrt(dx.^2+dy.^2+dz.^2);
```

La longueur totale est alors la simple somme discrète des longueurs ds, qui correspond bien à la valeur de l'intégrale si le nombre d'éléments Nmax est suffisamment grand :

```
longueur=sum(ds);
```

Parallèlement, comme il est possible de tracer l'allure en 3D du nœud de façon réaliste, et ce avec un rayon déterminé, il est possible de trouver quel rayon maximal « remplit » l'espace entre les brins, et de calculer ainsi le rapport « longueur / diamètre » du nœud.

Pour le nœud simple, la *figure 18* représente le nœud simulé avec un rayon proche du maximum : 0,5 pour un paramètre  $t \in [-0.5, 2.2\pi]$ .

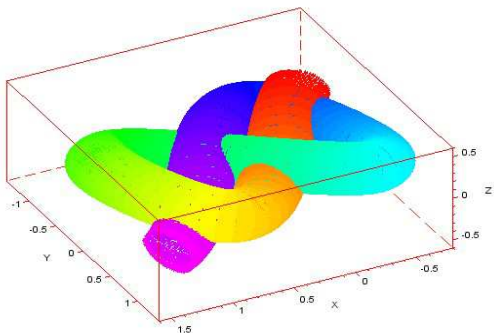


**Figure 18 : Nœud simple à rayon maximum**

Le calcul de la longueur du nœud a par ailleurs donné la longueur : 14,2 .

D'où le rapport :  $\left(\frac{\text{longueur}}{\text{diamètre}}\right)_{\text{nœud simple}} = 14,2$ .

Ce qui est intéressant alors est de comparer ce rapport avec celui du nœud de huit, illustré en version « rayon maximal » sur la *figure 19*.



**Figure 19 : Nœud de huit à rayon maximum**

Même si ce tracé fait apparaître quelques chevauchements, qu'il serait possible de corriger

en retravaillant les équations paramétriques et en imposant des courbures plus marquées, la longueur totale monte à : 11,8 pour un rayon maximal approximatif de 0,25 et pour un paramètre  $t \in [-0.5, 2.2\pi]$ .

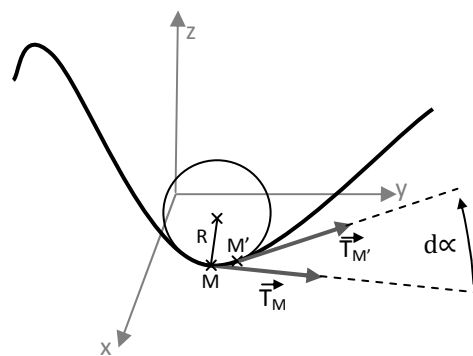
Ainsi, le rapport :  $\left(\frac{\text{longueur}}{\text{diamètre}}\right)_{\text{nœud de huit}} = 23,6$ .

Ce rapport apparaît comme environ 1,7 fois plus grand que celui du nœud simple, ce qui est intéressant et peut se retrouver facilement en pratique. Chacun remarquera, en faisant l'expérience avec un petit bout de corde, que confectionner un nœud de huit requiert environ 1,7 fois plus de longueur de corde qu'un nœud simple... Il suffit de faire le test.

## 5. Calculs de courbure

Les équations obtenues, et la connaissance numérique des vecteurs du repère de Frenet, permettent également de déterminer la courbure des courbes décrites, et ce en chaque point calculé.

La courbure  $\gamma$ , comme le représente la *figure 20*, peut être définie de façon géométrique comme l'inverse du rayon R du cercle osculateur, autrement dit du cercle tangent au point considéré et ce sur l'arc le plus important possible. R est appelé « rayon de courbure » et on retiendra en premier lieu que  $\gamma = \frac{1}{R}$ .



**Figure 20 : Rayon de courbure et angle de rotation du vecteur tangent**

Comme il peut exister plusieurs cercles tangents à ce point, et qu'un seul est le cercle osculateur, il est plus aisé de définir la courbure par rapport à la rotation du vecteur tangent autour du point considéré. Dans ce cadre là, l'expression de la courbure devient simplement :  $\gamma = \frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds}$  où  $d\alpha$  est la variation infinitésimale d'angle et  $ds$  est la variation correspondante de l'abscisse curviligne :  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ .

Dans la simulation numérique utilisée pour le tracé en 3D des différents modèles de nœuds, le vecteur  $\vec{T}$  est connu en chaque point, et l'ensemble de ses coordonnées est stocké dans un tableau de données.

En appelant  $T_{x_n}$ ,  $T_{y_n}$  et  $T_{z_n}$  les coordonnées du vecteur tangent d'indice  $n$ , et  $T_{x_{n+1}}$ ,  $T_{y_{n+1}}$  et  $T_{z_{n+1}}$  les coordonnées d'indice  $n+1$ , la variation de l'angle d'inclinaison de ces deux vecteurs, par rapport à un vecteur fixe quelconque, peut être calculé en remarquant que leur produit scalaire s'écrit :

$$\vec{T}_n \cdot \vec{T}_{n+1} = \|\vec{T}_n\| \cdot \|\vec{T}_{n+1}\| \cdot \cos(\alpha)$$

Comme les vecteurs sont unitaires, on en déduit :

$$\alpha = \text{Arcos}(\vec{T}_n \cdot \vec{T}_{n+1})$$

ou encore :

$$\alpha = \text{Arcos}(T_{x_n} \cdot T_{x_{n+1}} + T_{y_n} \cdot T_{y_{n+1}} + T_{z_n} \cdot T_{z_{n+1}}).$$

Ce type de calcul est facile à implanter dans le script Scilab qui a conduit aux figures en 3D, et concrètement tout se résume en une ligne :

```
Gamma=acos(
Tx(1:(Nmax-2)).*Tx(2:(Nmax-1))
+Ty(1:(Nmax-2)).*Ty(2:(Nmax-1))
+Tz(1:(Nmax-2)).*Tz(2:(Nmax-1)))
./(ds(1:Nmax-2));
```

Le résultat du calcul est un tableau contenant les valeurs des courbures en chaque point, qu'il est possible de représenter en fonction du paramètre  $t$  qui a permis de tracer les courbes. Les figures 21 à 23 représentent ainsi les évolutions de la courbure pour le nœud simple, le nœud de huit et le nœud de cabestan.

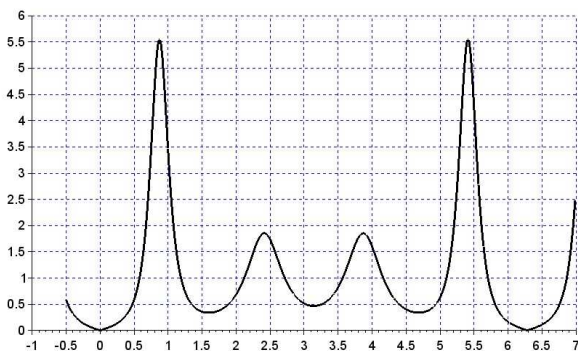


Figure 21 : Courbure du nœud simple  $\gamma = f(t)$  pour  $t \in [-0.5, 2.2 \cdot \pi]$

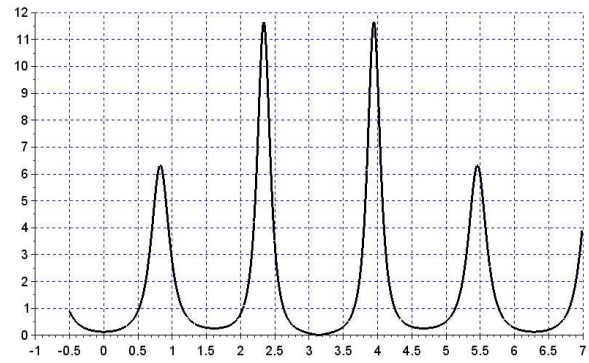


Figure 22 : Courbure du nœud de huit  $\gamma = f(t)$  pour  $t \in [-0.5, 2.2 \cdot \pi]$

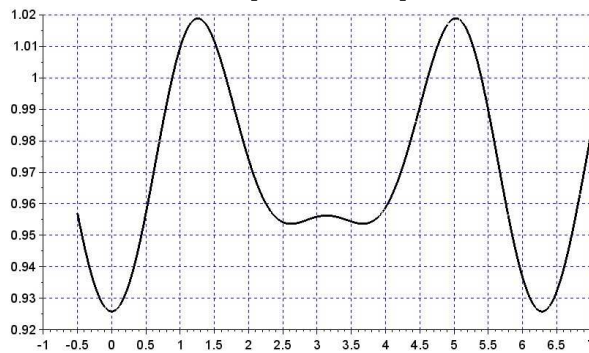


Figure 23 : Courbure du nœud de cabestan  $\gamma = f(t)$  pour  $t \in [-0.5, 2.2 \cdot \pi]$

L'analyse de ces courbes confirme, peut être plus simplement que les équations et les représentations 3D, l'aspect symétrique des trois nœuds étudiés.

Elle révèle aussi, surtout pour le nœud de huit, des points où la courbure est importante. Ce calcul pourrait trouver une application dans une étude sur la répartition des contraintes mécaniques et à l'analyse de la force de rupture.

A l'inverse, le nœud de cabestan présente une courbure plutôt régulière, ce qui correspond bien à son allure de nœud cylindrique destiné à être serré sur un mât ou une pièce relativement régulière et à y appliquer une forte friction très uniformément répartie.

## 6. Calculs de torsion et « intégrale de complexité »

La courbure n'est pas la seule grandeur classiquement associée aux variations d'orientation des vecteurs de la base de Frenet. Il existe également une grandeur  $\tau$ , appelée « torsion », qui représente la rotation du brin sur lui-même autour du vecteur tangent, et qui s'écrit :

$$\tau = \vec{B} \cdot \frac{d\vec{N}}{ds}$$

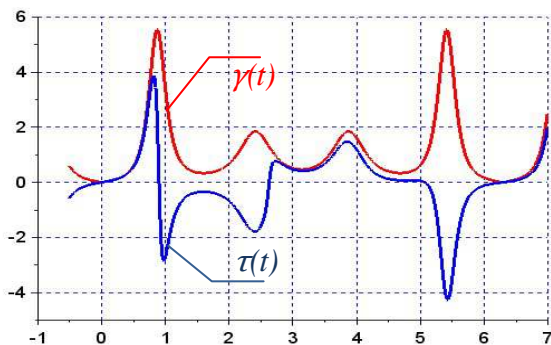


De même que pour la courbure, cette valeur peut être estimée simplement en chaque point de calcul des vecteurs  $\vec{N}$  et  $\vec{B}$ , et également être représentée en fonction du paramètre  $t$ .

*NB : dans le script établi sous Scilab, ce calcul s'écrira de façon compacte :*

```
Tau=Bx.*(dTx./dl(1:Nmax-2))
+By.*(dTy./dl(1:Nmax-2))
+Bz.*(dTz./dl(1:Nmax-2));
```

La figure 24 représente ainsi, sur le même graphe, le tracé de la courbure et de la torsion dans le cas du nœud simple.



**Figure 24 : Courbure et torsion du nœud simple pour  $t \in [-0.5, 2.2 \cdot \pi]$**

Ces deux grandeurs étant en quelques sortes complémentaires dans la caractérisation des circonvolutions du brin courant, il est possible de sommer leurs variations dans une « intégrale de complexité » du nœud, que l'on peut intuitivement définir comme l'intégrale de la moyenne quadratique de la courbure et de la torsion, ramenée par unité de longueur en la divisant par la longueur totale du nœud, soit donc :

$$C = \frac{1}{L} \cdot \int \sqrt{\gamma^2(t) + \tau^2(t)} \cdot dt$$

Dans le script Scilab, le calcul de cette intégrale revient à la somme discrète :

```
C=(sum(sqrt(Gamma.^2+Tau.^2))*dt)/longueur;
```

Les calculs réalisés sur les nœuds communs (à un seul brin) rencontrés précédemment donnent les valeurs suivantes :

Nœud simple :  $C = 0,015$   
 Nœud de huit :  $C = 0,020$   
 Nœud de cabestan :  $C = 0,006$

D'après ces valeurs, le nœud de huit présente l'intégrale de complexité la plus élevée des trois nœuds précédents. Il est possible d'interpréter cela comme le fait qu'il possède le plus de

circonvolutions, totalise des courbures et des torsions plus importantes que les deux autres. En d'autres termes, c'est bien le nœud le plus « complexe » des trois.

## 7. Conclusion

La détermination des équations, outre son aspect un peu expérimental, permet d'aborder simplement la représentation d'une courbe gauche, le calcul de sa longueur, de son repère de Serret-Frenet, de sa courbure, de sa torsion et même une grandeur résultante comme l'intégrale de complexité. Ces grandeurs sont alors à corrélérer à des notions très pratiques que tout un chacun peut vérifier, et ainsi permettre de « faire des mathématiques » avec des objets du quotidien. Parallèlement, on peut imaginer utiliser ce type de grandeurs à partir de modèles comparables pour caractériser des fibres végétales complexes, les circonvolutions des réseaux sanguins, les courbes décrites par des canaux de tous types, des réseaux routiers, ou encore tout type de courbe gauche naturelle ou artificielle.

## 8. Annexes

**Script Scilab pour le tracé du nœud simple en 3D avec ses torons :**

```
pi=%pi;// raccourci pour pi

t_init=-0.5;// paramètre t initial
t_final=2.2*pi;// paramètre t final
Nmax=100;// nombre de points par tronçon élémentaire
N=100;// Nombre de tronçons élémentaires de couleurs de la courbe
rayon=0.1;// rayon du toron

scf(1);// Sélection fenêtre graphique n°1
clf();// Effacement de la fenêtre
f=gcf();// propriétés de la figure
e=gce();// propriétés des bordures et fonds
a=gca();// propriétés des axes
f.color_map=rainbowcolormap(N);// couleurs arc en ciel
xset('thickness',3);// Epaisseur et couleur à 3 pour le reste de la figure

// boucle pour tracer la courbe en plusieurs tronçons de couleurs différentes.
for index=0:(N-1),
t1=t_init+index*(t_final-t_init)/(N-1);
t2=t1+(t_final-t_init)/(N-1);
t=linspace(t1,t2,Nmax);// Définition du tableau de valeurs du paramètre t

//***** définition des équations *****//
x=(sin(1*t)+t/10);
y=sin(1.5*t);
z=-sin(2*t);
//*****

//***** calcul de l'abscisse curviligne *****//
```

```

xh=x(2:Nmax)-x(1:Nmax-1);
yh=y(2:Nmax)-y(1:Nmax-1);
zh=z(2:Nmax)-z(1:Nmax-1);
ds=sqrt(xh.^2+yh.^2+zh.^2);

//***** calcul des vecteurs T, N et B *****//
dt=(t2-t1)/Nmax;
Tx=(x(2:(Nmax))-x(1:(Nmax-1)))/dt;// calcul des dérivées
Ty=(y(2:(Nmax))-y(1:(Nmax-1)))/dt;
Tz=(z(2:(Nmax))-z(1:(Nmax-1)))/dt;
norme=sqrt(Tx.^2+Ty.^2+Tz.^2);
Tx=Tx./norme;
Ty=Ty./norme;
Tz=Tz./norme;

x=x(2:Nmax);
y=y(2:Nmax);
z=z(2:Nmax);
param3d(x,y,z);

Nx=Tz-Ty;
Ny=Tx-Tz;
Nz=Ty-Tx;
norme=sqrt(Nx.^2+Ny.^2+Nz.^2);
Nx=Nx./norme;
Ny=Ny./norme;
Nz=Nz./norme;

Bx=Ty.*Nz-Tz.*Ny;
By=Tz.*Nx-Tx.*Nz;
Bz=Tx.*Ny-Ty.*Nx;
norme=sqrt(Bx.^2+By.^2+Bz.^2);
Bx=Bx./norme;
By=By./norme;
Bz=Bz./norme;

dTx=-Tx(1:(Nmax-2))+Tx(2:(Nmax-1));
dTy=-Ty(1:(Nmax-2))+Ty(2:(Nmax-1));
dTz=-Tz(1:(Nmax-2))+Tz(2:(Nmax-1));
//dl=dl(1:(Nmax-2));
Bx=Bx(1:(Nmax-2));
By=By(1:(Nmax-2));
Bz=Bz(1:(Nmax-2));

// Calcul de la courbure : Gamma(n)
Gamma=acos(Tx(1:(Nmax-2)).*Tx(2:(Nmax-1))+Ty(1:(Nmax-2)).*Ty(2:(Nmax-1))+Tz(1:(Nmax-2)).*Tz(2:(Nmax-1)))/(ds(1:Nmax-2));
// Calcul de la torsion : Tau(n)
Tau=Bx.*(dTx./(ds(1:Nmax-2)))+By.*(dTz./(ds(1:Nmax-2)))+Bz.*(dTz./(ds(1:Nmax-2)));

//*****//

//***** tracé des torons *****//
e.foreground=index+1;// couleur du tronçon indexée par "index" de la boucle

fork=0:5:360,
param3d(x+rayon*(cos(k/180*%pi)*Nx+sin(k/180*%pi)*Bx),
y+rayon*(cos(k/180*%pi)*Ny+sin(k/180*%pi)*By),z+rayon*(cos(k/180*%pi)*Nz+sin(k/180*%pi)*Bz);
end

end// de la boucle globale
e.foreground=1;// couleur 0 pour le reste
xset('thickness',1);// Epaisseur et couleur à 1 pour le reste de la figure

```

```

//***** calcul de la longueur *****//
// calcul direct des équations sur tout l'intervalle de définition
t=linspace(t_init,t_final,Nmax);// Définition du tableau de valeurs de l'angle t
x=(sin(1*t)+t/10);
y=sin(1.5*t);
z=-sin(2*t);

// calcul des écarts des coordonnées
xh=x(2:Nmax)-x(1:Nmax-1);
yh=y(2:Nmax)-y(1:Nmax-1);
zh=z(2:Nmax)-z(1:Nmax-1);
// calcul de ds l'abscisse curviligne pour chaque écart
ds=sqrt(xh.^2+yh.^2+zh.^2);
longueur=sum(ds);
// affichage dans la console :
disp(longueur,"longueur du tracé : l=");

// Calcul de l'intégrale de complexité
complexite=(sum(sqrt(Gamma.^2+Tau.^2))*dteta)/longueur;
disp(complexite,"Complexité de la courbe : C=");

```

## 8. Bibliographie

- Téléchargement et crédits du logiciel libre Scilab : <http://www.scilab.org/fr/>
- Le site *mathcurve.com* répertorie les équations de certains nœuds, par exemple pour le nœud de huit : <https://www.mathcurve.com/courbes3d/nœuds/noeudenhuit.shtml>
- Un article de Paul Bourke, découvert a posteriori, expose une mise en équation de nœuds et des tracés magnifiques en 3D: <http://paulbourke.net/geometry/knots/>
- Un article de Lee Stemkosky expose également plusieurs types d'équations paramétriques, à base de polynômes ou de fonctions trigonométriques : <http://home.adelphi.edu/~stemkoski/knotgallery/>
- Un article dédié aux équations paramétriques polynomiales de quelques nœuds : <https://www.mtholyoke.edu/~adurfee/reu/04/brown.pdf>
- Parmi les nombreux livres dédiés au nœuds :
  - « Comment réussir tous ses nœuds », Des Pawson - *Hachette pratique*
  - « Knots, the completec visual guide », Des Pawson - *DK*
  - « Les noeuds, le grand livre pratique », Geoffrey Budworth- *Les éditions de l'homme*
  - « Le grand livre des nœuds », C. Ashley Gallimard